

Annales de la
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
de Bruxelles

Association sans but lucratif

TOME SOIXANTE-TREIZIÈME

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

DEUXIÈME FASCICULE

18 juin 1959



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique
et du Gouvernement*

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11
LOUVAIN

1959

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 40 frs

AVIS

Les périodiques internationaux de références et de bibliographie sont autorisés à reproduire, moyennant une référence, les résumés que les auteurs placent en tête de leurs travaux dans ces *Annales*.

TABLE DES MATIÈRES

Session du 16 avril 1959, à Bruxelles

PREMIÈRE SECTION : SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES		231
Système demosien associatif de multigroupoïdes avec un scalaire non singulier, par A. SADE		231
Some involution and incidence properties of the twisted cubic, by H.G. GREEN and L.E. PRIOR		235
DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES		245
Tables pour le calcul des doublets minces collés corrigés de l'aberration sphérique		
II. Valeurs de ρ_1 et de ρ_3 , par A. BIOT		245
III. Valeurs de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \varpi_2, A+2$, pour $n_2 = 1,70$ et $n_1 = 1,50$; 1,57; 1,58; 1,62; 1,66, par A. BIOT		253
Contribution à l'étude, par spectrométrie infrarouge, de l'acide périodique H_5IO_6 et du comportement vibratoire du groupement hydroxyle du type I-OH, par P. NATALIS		261
Mesure de la polarisation circulaire des rayons gamma par détection de l'électron Compton; étude critique de l'expérience Clay-Hereford, par J. DEUTSCH		270
Mesure de la masse du Rn^{222} par spectrographie de masse, par S. SZÜCS et J.M. DELFOSSE		279
Un sélecteur de temps de vol pour neutrons de 14 Mev, par G. DECONINCK et A. MARTEGANI		287

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

<i>en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg</i>	100 F
<i>dans les autres pays</i>	150 F

SESSION DU 16 AVRIL 1959

à Bruxelles

Première Section

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Système demosien associatif de multigroupoïdes
avec un scalaire non singulier

PAR

M. A. SADE

Un *hypergroupoïde*, [12] est un ensemble, E , muni d'une loi de composition $(*)$ faisant correspondre à tout couple ordonné $x, y \in E$ un sous-ensemble non vide, $x * y = (a, b, c, \dots) \subseteq E$. Le vocable *multigroupoïde* semble plus conforme à l'usage international, ([5], p. 101, [8], Chap. I, N° 5). Un *scalaire* ([8], Chap. I, N° 4) est un élément $s \in E$, tel que $\forall x \in E, x * s$ et $s * x$ se réduisent à un seul élément. Un multigroupoïde est *associatif* si $\forall x, y, z \in E, (x * y) * z = x * (y * z)$. Une *unité scalaire* est un élément, u , tel que $\forall x \in E, x * u = u * x = x$. L'application de E dans lui-même $\Delta_s = (x \rightarrow x * s)$, qui projette chaque élément de E sur son produit par le scalaire s , s'appelle la *translation à droite* ([2], p. 509), relative à s . Si Δ_s est une application biunivoque de E sur lui-même, l'élément s est dit *non-singulier à droite*, ([4], p. 248). On formule des définitions analogues à gauche, $\Gamma_s = (x \rightarrow s * x)$. L'élément s est *non-singulier* si ses deux translations sont des permutations. Deux multigroupoïdes $M = E(*)$ et $M' = E(\times)$, définis sur le même ensemble E , sont *isotopes*, ([1], p. 696) si, ξ, η, ζ étant trois applications biunivoques de E sur lui-même,

$$\forall x, y, z \in E, x * y = z \Leftrightarrow x\xi \times y\eta = z\zeta,$$

ou encore $x * y = (x\zeta \times y\eta) \zeta^{-1}$. Ils sont *isomorphes* si $\xi = \eta = \zeta$. Il est évident que, pour les multigroupoïdes, comme pour les groupoïdes uniformes, l'isotopie est une relation d'équivalence.

Un système de multigroupoïdes défini sur un ensemble commun E , par des lois de composition formant une population $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$, satisfait à l'associativité demosienne, ([11], [9], N° 2, iv) si $\forall x, y, z \in E, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi, \exists \varphi_3, \varphi_4 \in \Phi$,

$$(1) \quad (x \varphi_1 y) \varphi_2 z = x \varphi_3 (y \varphi_4 z).$$

T. EVANS ([6], p. 200) a montré que tout groupoïde fini, G , avec élément neutre, possédant quatre isotopes satisfaisant (1), est un semigroupe. BELOUSOV, [3] a énoncé le théorème suivant : quatre quasigroupes vérifiant (1) sont isotopes d'un même groupe. Cette proposition a été établie par HOSSZÚ [7]. On se propose ici d'étudier la propriété analogue dans le cas des ensembles demosiens de multigroupoïdes.

Soit s l'élément scalaire non-singulier bilatère commun à tous les multigroupoïdes $E(\varphi_i)$. Dans ce qui suit, toutes les translations étant prises relativement à s , on écrira Δ_i au lieu de $\Delta_{s,i}$ pour la translation à droite relative à s dans le multigroupoïde dont la loi de composition est φ_i , et de même Γ_i pour $\Gamma_{s,i}$. Par hypothèse, tous les Δ, Γ sont des permutations de E et

$$u = v\Delta_i \Leftrightarrow u = v\varphi_i s \Leftrightarrow v = u\Delta_i^{-1},$$

$$u = v\Gamma_i \Leftrightarrow u = s\varphi_i v \Leftrightarrow v = u\Gamma_i^{-1}.$$

Posons

$$(2) \quad x\Delta_2^{-1} = s\varphi_1 u = u\Gamma_1; \quad u = x\Delta_2^{-1} \Gamma_1^{-1},$$

$$(3) \quad y\Gamma_3^{-1} = s\varphi_4 v = v\Gamma_4; \quad v = y\Gamma_3^{-1} \Gamma_4^{-1},$$

$$(4) \quad x\Delta_2^{-1} = w\varphi_1 s = w\Delta_1; \quad w = x\Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1},$$

$$(5) \quad y\Gamma_3^{-1} = h\varphi_4 s = h\Delta_4; \quad h = y\Gamma_3^{-1} \Delta_4^{-1},$$

et remarquons que, d'après (1), $(s\varphi_1 x)\varphi_2 s = s\varphi_3(x\varphi_4 s)$, ou $x\Gamma_1\Delta_2 = x\Delta_4\Gamma_3$

$$(6) \quad \Gamma_3^{-1}\Delta_4^{-1} = \Delta_2^{-1}\Gamma_1^{-1}.$$

Cela posé, considérons le multigroupoïde $M = E(\times)$, isotope de $E(\varphi_1)$ par $\xi = \Delta_2^{-1}\Delta_1^{-1}$, $\eta = \Gamma_3^{-1}\Delta_4^{-1}$, $\zeta = \Delta_2^{-1}$, c'est-à-dire

$$(7) \quad x \times y = (x\Delta_2^{-1}\Delta_1^{-1}\varphi_1 y\Gamma_3^{-1}\Delta_4^{-1})\Delta_2 = F_1.$$

Utilisant (4), (5), puis (1) et encore (5) et (4), on a

$$F_1 = (w \varphi_1 h) \Delta_2 = (w \varphi_1 h) \varphi_2 s = w \varphi_3 (h \varphi_4 s),$$

$$(8) \quad x \times y = x \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} \varphi_3 y \Gamma_3^{-1} = F_3.$$

Ainsi M est isotope à $E(\varphi_3)$ par $\xi = \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1}$, $\eta = \Gamma_3^{-1}$, $\zeta = 1$.

Tenant compte de (4), (3), (1), (4), (3),

$$F_3 = w \varphi_3 v \Gamma_4 = w \varphi_3 (s \varphi_4 v) = (w \varphi_1 s) \varphi_2 v = w \Delta_1 \varphi_2 v,$$

$$(9) \quad x \times y = x \Delta_2^{-1} \varphi_2 y \Gamma_3^{-1} \Gamma_4^{-1} = F_2,$$

donc M est isotope à $E(\varphi_2)$ par $\xi = \Delta_2^{-1}$, $\eta = \Gamma_3^{-1} \Gamma_4^{-1}$, $\zeta = 1$.

De même, en se servant successivement de (2), (3), (1), (3), (2),

$$F_2 = (s \varphi_1 u) \varphi_2 v = s \varphi_3 (u \varphi_4 v) = (u \varphi_4 v) \Gamma_3,$$

$$(10) \quad x \times y = (x \Delta_2^{-1} \Gamma_1^{-1} \varphi_4 y \Gamma_3^{-1} \Gamma_4^{-1}) \Gamma_3 = F_4,$$

et cette fois, M est isotope à $E(\varphi_4)$ par $\xi = \Delta_2^{-1} \Gamma_1^{-1}$, $\eta = \Gamma_3^{-1} \Gamma_4^{-1}$,

$$\zeta = \Gamma_3^{-1}.$$

Calculons le produit $P = (x \times y) \times z$ en utilisant (7) pour la première multiplication et (9) pour la seconde, on aura

$$(11) \quad P = (x \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} \varphi_1 y \Gamma_3^{-1} \Delta_4^{-1}) \Delta_2 \Delta_2^{-1} \varphi_2 z \Gamma_3^{-1} \Gamma_4^{-1};$$

réduisant $\Delta_2 \Delta_2^{-1} = 1$ et appliquant (1),

$$(12) \quad P = x \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} \varphi_3 (y \Gamma_3^{-1} \Delta_4^{-1} \varphi_4 z \Gamma_3^{-1} \Gamma_4^{-1}),$$

remplaçant, d'après (6), $\Gamma_3^{-1} \Delta_4^{-1}$ par $\Delta_2^{-1} \Gamma_1^{-1}$ et exprimant la valeur du second facteur au moyen de (10), puis tenant compte de (8),

$$(13) \quad (x \times y) \times z = P = x \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} \varphi_3 (y \times z) \Gamma_3^{-1} = x \times (y \times z).$$

Donc $M = E(\times)$ est associatif.

Supposons φ_1 fixe et faisons décrire à φ_2 toute la population Φ . Puisque le système a l'associativité demosienne, $\forall \varphi_2 \in \Phi$, $\exists \varphi_3, \varphi_4 \in \Phi$, satisfaisant (1) et, d'après ce qui précède, les quatre multigroupoïdes $E(\varphi_1)$, $E(\varphi_2)$, $E(\varphi_3)$, $E(\varphi_4)$ seront isotopes à un même multigroupoïde $M = E(\times)$. Si M_1, M_2, M_3, \dots sont tous les multigroupoïdes ainsi obtenus quand φ_2 décrit Φ , alors $E(\varphi_1)$ sera isotope à tous les M_i et, par suite de la transitivité de l'isotopie, tous les M_i seront isotopes entre eux. Si l'on choisit arbitrairement l'un d'eux, M, tous les $E(\varphi_i)$, $\varphi_i \in \Phi$, seront isotopes à M, d'où

THÉORÈME. *Tout système de multigroupoïdes, avec élément scalaire non-singulier bilatère commun, satisfaisant à l'associativité demosienne, se compose de multigroupoïdes isotopes d'un même multigroupoïde associatif.*

Si tous les membres $E(\varphi_i)$ ont en outre une unité scalaire bilatère, on peut appliquer, [10], le théorème : Si un multigroupoïde M , avec unité bilatère scalaire, coïncide avec un multigroupoïde M' par l'isotopie (ξ, η, ζ) , alors M et M' coïncident par l'isomorphisme $(x \rightarrow x\xi\zeta^{-1}\eta)$. On parvient ainsi au corollaire

COROLLAIRE. *Tout système associatif demosien de multigroupoïdes avec élément neutre et élément scalaire non-singulier commun, se compose de multigroupoïdes isomorphes à un même multigroupoïde associatif.*

Les propositions subsistent si l'on remplace (1) par la non-vacuité de l'intersection $(x\varphi_1y)\varphi_2z \cap x\varphi_3(y\varphi_4z) \neq \emptyset$. Mais le raisonnement n'est plus valable si l'on suppose seulement l'inclusion $(x\varphi_1y)\varphi_2z \supseteq x\varphi_3(y\varphi_4z)$, car (8), (9), (10) se réduisent alors à $F_1, F_2 \supset F_3 \supset F_4$ alors que le calcul de P , après (10), exige $F_4 \supset F_1$.

RÉFÉRENCES

- (1) ALBERT, Adrian, A., Non-associative Algebras, *Ann. of Math.*, **43**, (1942), 685-707.
- (2) —, Quasigroups. I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54**, (1943), 507-519.
- (3) BELOUSOV, *Uspehi Nauk*, **13**, (1958), fasc. 3 (81).
- (4) BRUCK, RICHARD, H., Contributions to the Theory of Loops, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60**, (1946), 245-354.
- (5) EATON, J. E., Theory of Cogroups. *Duke Math. Journ.*, **6**, (1940), 101-107.
- (6) EVANS TREVOR, A Note on the associative Law, *Journ. London Math. Soc.*, **25**, (1950), 196-201.
- (7) HOSSZÚ, MIKLOS, Lettre à l'auteur du 10 juillet 1958.
- (8) KUNTZMANN, Jean, Contribution à l'étude des systèmes multiformes, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **3**, iv, (1939), 155-193.
- (9) SADE, Albert, Quasigroupes obéissant à certaines lois, *Istanbul universitesi Fen Fakultesi Mecmuasi*. Serie A, **22**, (1959), 151-184.
- (10) —, Isomorphisme d'hypergroupoïdes isotopes, *Pacific Journ. Math.*, (1959).
- (11) —, Théorie des systèmes demosiens de groupoïdes, En préparation.
- (12) UTUMI, Yuzo, On Hypergroups of groups right cosets, *Osaka Math. Journ.*, **1**, (1949), 73-80.

Some involution and incidence properties of the twisted cubic

BY

H. G. GREEN and L. E. PRIOR
The University of Nottingham, England

In a previous paper the authors developed some properties of lines in three dimensional space connected with a twisted cubic curve containing seven given base points from the Pascal line of a hexagon inscribed in a conic. In the present paper these results are extended to the 60 Pascal lines of hexagons defined by six points on a conic, taken in any order. It traces in three dimensions the properties corresponding to those of the interbehaviours of Pascal lines in two dimensions. The methods used are mainly those of projections and the extended concept of the Fregier point as given by M. Pomey⁽¹⁾.

The results lead to the completion of a theorem concerned with a certain group of quadrics containing a twisted cubic curve.

1. Notation. The fixed base points on the twisted cubic curve will be denoted by the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. We showed in the previous paper⁽²⁾ that an irreducible involution of order 4 is defined by taking four suitably selected groups of four points from these base points as four members of the involution. Further that a typical selection, as for example

1	2	3	5
1	2	4	6
1	3	4	7
2	3	6	7

can be made by taking any four of seven groups of four in which

⁽¹⁾ POMEY, *Journal de l'École Polytechnique*, 29^e Cahier, 1931, p. 144.

⁽²⁾ Sur des configurations de Pascal, MM. H. G. GREEN et L. E. PRIOR, *Journal de l'École Polytechnique*, 11^e Série, 31^e Cahier, 1933, p. 155.

any two groups together contain six and only six points. These systems of seven groups can be formed in 30 ways, and the selection above is completed by

1	5	6	7
2	4	5	7
3	4	5	6

The three Fregier points (F points) which can be obtained from the base points in the typical selection made will be denoted by 1,234; 2,136 and 3,712, lying on the F line 123: further the other F lines through the F point associated with the base point [1] are 124, 134 derived from the involutions obtained by replacing 2367 by 2457 and 3456 respectively. The common F point of these three lines is 1,234 and the plane containing them passes through the base point [1]. It is convenient to call this the F plane 1,234. Each system of seven groups of four gives rise to a closed network of 28 F lines, 28 F points and 28 F planes. The joins of two F points of types 2,136; 2,145 passes through the base point [1], being the intersection of planes 135, 146; and the three F points of types 2,136; 2,145; 2,735 lie in the plane 135.

In dealing with the properties of the system it is usually convenient to define the involution system in terms of the numbers representing the base points not included in the groups, thus instead of the system

3456		712
2457		136
2367		145
1567	we use the remainder system	234
1347		256
1246		735
1235		746

There are 30 systems of complete groups and the networks arising from them have no F points nor F lines in common. The complete list of remainders for these systems is given in Table I.

The systems which have three remainders in common are called completely projective. The 30 systems are divided into two sets of 15 which for convenience only we shall call the primary and secondary sets, and are such that from any base point any system in one is completely projective with one system in the other. Two systems which are completely projective from a given base point have the property that six lines through the base point each

TABLE I

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)
712	712	712	713	713	713	714	714	714	715	715	715	716	716	716
734	735	736	724	725	726	723	725	726	723	724	726	723	724	725
756	746	745	756	746	745	756	736	735	746	736	734	745	735	734
135	136	134	126	124	125	125	126	123	126	123	124	124	125	123
146	145	156	145	156	146	136	135	156	134	146	136	135	134	145
236	234	235	235	236	234	246	234	245	245	256	235	256	236	246
245	256	246	346	345	356	345	456	346	356	345	456	346	456	356

(a')	(b')	(c')	(d')	(e')	(f')	(g')	(h')	(i')	(j')	(k')	(l')	(m')	(n')	(o')
712	712	712	713	713	713	714	714	714	715	715	715	716	716	716
734	735	736	724	725	726	723	725	726	723	724	726	723	724	725
756	746	745	756	746	745	756	736	735	746	736	734	745	735	734
246	254	265	345	356	364	436	453	465	534	546	563	635	643	654
235	263	243	326	324	352	425	462	432	526	523	542	624	652	632
145	156	164	416	514	615	315	561	613	361	413	641	341	451	531
136	134	153	125	162	142	216	123	512	214	621	312	251	231	421

contain two F points of one and two F points of the other, and the systems have four common F planes. Taking for example the systems (b) and (a'), completely projective from [1], (the number 1 occurs in all the three common remainders) the table of collinearities is

(b)	(a')
2,136	2,145
3,712	3,145
4,712	4,136
5,712	5,136
6,712	6,145
7,136	7,145
	2,136
	2,145

and the F planes are

(b)	(a')
1,234	1,756
1,256	1,734
1,735	1,246
1,746	1,235

Any three systems which have one and only one remainder in common are called partially projective. They are such that through each of the three base points with numbers identical with those of the common remainder there are three lines of collinearities, each line containing two F points from each of two of the systems. Thus for example taking the systems (a), (b), (c) the collinearities are given by

Base point	(a)	(b)	(c)
7	$\left\{ \begin{array}{l} — \\ 1,734; 1,756 \\ 2,734; 2,756 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,735; 1,746 \\ 2,735; 2,746 \\ — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,736; 2,745 \\ — \\ 1,736; 1,745 \end{array} \right.$
1	$\left\{ \begin{array}{l} 7,135; 7,146 \\ — \\ 2,135; 2,146 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} — \\ 2,136; 2,145 \\ 7,136; 7,145 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,134; 2,156 \\ 7,134; 7,156 \\ — \end{array} \right.$
2	$\left\{ \begin{array}{l} 7,236; 7,245 \\ 1,236; 1,245 \\ — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,234; 1,256 \\ — \\ 7,234; 7,256 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} — \\ 7,235; 7,246 \\ 1,235; 1,246 \end{array} \right.$

Taking the 15 systems (a) ... (o) any pair is partially projective with a particular third of the series and similarly for the series (a') ... (o'). There are no partially projective properties between systems from different series, since any system of the primary set has three remainders in common and is completely projective with each of seven systems of the secondary set and has no remainder in common with any of the remaining eight.

2. Projecting from the base point [7] on to any plane the twisted cubic becomes a conic and the six other base points become the vertices of an inscribed hexagon. We shall denote the vertices of the hexagon by the numbers of the base points from which they are derived. We shall denote the hexagon which has 1 and 2, 3 and 4, 5 and 6 as opposite vertices and which has 1, 3, 5 as alternate vertices by the symbol 135,246. Consider the projection of the network defined by the system (a). The line of intersection of the planes 716, 752 contains the F points 3,712; 3,756 and these therefore project into the T point 16,52 the point of intersection of the sides 16,52 of the hexagon. Similarly from the F points 5,734; 5,712 we obtain the T point 32,14 and from the F points 1,756; 1,734 we obtain the T point 54,36. These F points are coplanar in the F plane 7,135 through the base point [7] and its intersection

with the plane of the projection gives the Pascal line of the hexagon and will be denoted by $p\ 135,246$. The Pascal figure obtained from the system (a') , completely projective with (a) from base point [7] is identical, the F plane being 7,246. The F planes 7 135 (a) and 7,246 (a') both contain the base point [7] and the Pascal line $p\ 135,246$. They are therefore identical. The four p lines which can be derived by projection from the base point [7] from system (a) , or from system (a') , and the corresponding F planes and hexagons are given in Table II.

TABLE II

(a)	(a')	hexagon
7,135	7,246	135,246
7,146	7,235	146,235
7,236	7,145	236,145
7,245	7,136	245,136

For each hexagon there are three T points. Taking the four hexagons from any one system each T point occurs twice and hence six T points can be obtained from any system. Further any one T point can be obtained from two systems of either of the primary or secondary sets, for example the T point 16,52 can be obtained from (a) in the hexagons 135,246 and 236,145 and from (l) in the hexagons 124,563 and 456,312. The line joining the base point [7] to this T point contains two F points from each of the systems (a) , (l) , (a') , (l') . The property in the three-dimensional network corresponding to the existence of the 45 T points of the complete Pascal configuration is

‘Through each base point there are 45 lines containing eight F points each, and three such lines pass through every F point’.

Since for the purposes of projection from any one base point there are 15 independent systems $(a) \dots (o)$ the whole of the 60 Pascal lines, each containing three T points, can be obtained. The corresponding three-dimensional analogue is

‘The axes of pairs of planes each containing three base points with one in common are coplanar in threes in F planes, and there are 420 such planes’.

3. The lines $p\ 135,246$; $p\ 146,235$; $p\ 234,156$ and $p\ 256,134$ are concurrent in the T point 36,45. Hence

‘The F planes 7,135; 7,146 from (a), 7,234; 7,256 from (b) (or equally well 7,246; 7,235 from (a') and 7,156; 7,134 from (b')) are coaxal’.

4. The lines p 135,246; p 135,462 and p 135,624 are concurrent in a G point which will be denoted by G 135, and hence

‘The three F planes 7,135 of the systems (a), (h) and (m), partially projective from 1, 3 and 5, are coaxal’.

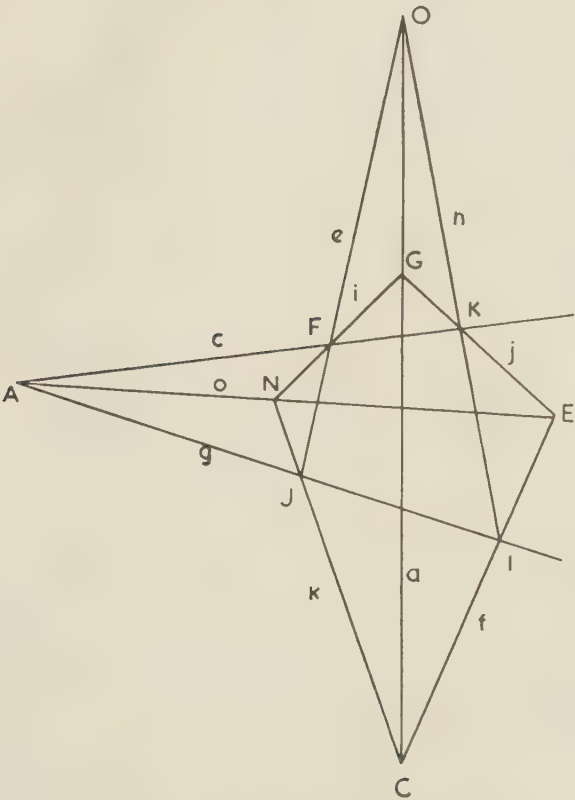
Similarly the lines p 246,153; p 246,531 and p 246,315 are concurrent in the G point G 246 and hence the three F planes 7,246 of (c), (o) and (g), partially projective from 2, 4, 6, are coaxal. G 246 may also be obtained as G' 135 and the F planes 7,135 of the secondary systems (c'), (o'), (g') are coaxal. G 135 and G' 135 are termed conjugate G points since they are conjugate points of the conic. There are 20 G points and therefore

‘There are 20 sets of three coaxal F planes through each base point, and their axes are conjugate in pairs with respect to the cone containing the cubic and with its vertex at the corresponding base point’.

5. If we take any inscribed hexagon there are three hexagons which have no side common with it. The p lines of such a trio meet in a point known as an H point. Starting with the hexagon 135,246 the derived hexagons are 235,164; 145,632; 136,425. Hence from the F plane 7,135 of (a) (or 7,246 of (a')) as basis we can form a coaxal pencil of F planes namely 7,235 of (c) (or 7,164 of (c')); 7,145 of (o) (or 7,632 of (o')); 7,136 of (g) (or 7,425 of (g')). We note that the systems (c), (o), (g) are completely projective with (a') from the vertices 2, 4, 6 respectively. Starting with the F planes 7,235 of (c); 7,145 of (o); 7,136 of (g) we can select in a similar way the F planes 7,256 of (k), 7,234 of (f); 7,124 of (e), 7,456 of (n); 7,346 of (i), 7,126 of (j) in addition to 7,135 of (a), so that

‘Any F plane contains three H axes. There are groups of 10 F planes such that from any one of the planes three other coaxal planes of the group can be derived and the 10 intersections of the axes with any plane are the vertices of the closed figure in which the small letters refer to the intersecting planes and the capital letters are the letters of the deriving planes. Working from any given base point the group of 10 planes can be obtained in six ways (from every system there are 4 F planes associated with any

base point, each determining a group of 10, or in all there are $4 \times 15/10$ different groups: the secondary set, being completely projective with the primary set from any base point, gives the identical figure)'.



6. If we take three H points derived from suitable hexagons it is known that there is a G point collinear with them, the line of collinearity being known as a g line. A suitable choice of hexagons is shown in the table in which the three H points are given by the concurrencies of the p lines of the three derived hexagons shown in each row

235,164	145,632	136,425	derived from	135,246
345,216	156,243	123,654	»	»
356,421	125,436	134,265	»	»

and the G point by the hexagons

246,315 246,531 246,153

which is the conjugate G point to the one given by the hexagons from which the H points are derived. Hence the H axes of the three sets of coaxial F planes

7,235 (<i>c</i>)	7,145 (<i>o</i>)	7,136 (<i>g</i>)
7,345 (<i>g</i>)	7,156 (<i>c</i>)	7,123 (<i>o</i>)
7,356 (<i>o</i>)	7,125 (<i>g</i>)	7,134 (<i>c</i>)

are coplanar with the axis of the coaxial F planes 7,246 of (*c*), (*o*) and (*g*). We may term this plane the g plane g 7,246 which is identical with g' 7,135.

‘Through each base point there are 20 g planes each containing 3 H axes and one G axis’.

7. The g lines of the G points of the hexagons

135,246 (<i>a</i>)	135,462 (<i>h</i>)	135,624 (<i>m</i>)
146,235 (<i>a</i>)	146,523 (<i>k</i>)	146,352 (<i>f</i>)
234,156 (<i>b</i>)	234,561 (<i>h</i>)	234,615 (<i>f</i>)
256,134 (<i>b</i>)	256,413 (<i>k</i>)	256,341 (<i>m</i>)

being derived from systems partially projective with (*c*) from

7,1,2 7,3,6 7,4,5

are concurrent in the I point $I(7,c)$. Hence the planes g 7,246; g 7,235; g 7,156 and g 7,134 are coaxial. Taking in the same way systems partially projective with the other systems of the primary set

‘There are in all 15 I axes through each base point. Further since any g plane is associated with three systems of the primary set, there are three I axes in each g plane’.

Considering the projected figure, we have therefore the Hexagrammum Mysticum of Pascal consisting of 15 I points lying in threes on 15 g lines and with four g lines through each of them.

8. The G points lying on the p lines of the hexagons 134,265 (*c*); 156,243 (*c*); 235,164 (*c*) and 246,153 (*c*) are collinear in the i line $i(7,c)$ and hence the G axes G 7,134; G 7,156; G 7,235; G 7,246 are coplanar in the plane $i(7,c)$.

‘There are 15 i planes connected with each base point with three of them through each G axis’.

9. We now show that any Fregier line, such as 246 in (*a*),

is a generator of the quadric defined by three base chords of the cubic and is of the same system. The Fregier point 2,146 lies on the line of intersection of the base planes [134], [156] which is a generator of the quadric defined by the chords [12], [34], [56]. The F points 4,236 and 6,245 lie on the intersections of the base planes [312], [356] and [512], [534] respectively and these lines are generators of the same system of the same quadric. The Fregier line 246 on which these three Fregier points lie is therefore a generator of the quadric of the same system as the base chords. The other generators through the points [2], [4], [6] meet the F line 246 in the Fregier points 1, 3, 5 defined by the involution giving the Fregier line. The F plane 2,146 contains the F line 246 and the base point [2] which is therefore the tangent plane to the quadric at the F point 1, and there are similar tangent planes for the other F points. The Fregier 7 point on the line is its intersection with the plane [246].

10. We further show that the join of two F points such as 2,146 (a) and 2,735 (b') is a chord of the cubic. It is to be noted that systems (a) and (b') are completely projective from [2] and that the two remainders have no number in common.

We have shown in paragraph 2 that the Fregier planes 2,146 (a) and 2,735 (b') are identical, and contain the line of intersection of base planes [234] and [256] through the base point [2]. The point 2,146 (a) lies on the line of intersection of [134], [156] through [1], and the point 2,735 (b') lies on the line of intersection of [734], [756] through [7]. The quadric defined by these three lines of intersection through [2], [1], [7] therefore has chords [34], [56] and the join of 2,146 (a) and 2,735 (b') as generators of the other system. The quadric contains the seven base points on the cubic and therefore contains the cubic. Hence the join of the Fregier points is also a chord of the cubic.

We give in columns the complete list of Fregier points lying on transversals to the base chords [34], [56] from the base points [7], [1], [2] respectively and such that the two Fregier points shown on the same row lie on a chord of the cubic

[7]	[1]	[2]
2,735 (<i>b'</i>)	2,146 (<i>a</i>)	—
2,746 (<i>b'</i>)	2,135 (<i>a</i>)	—
—	7,136 (<i>b</i>)	7,254 (<i>b'</i>)
—	7,145 (<i>b</i>)	7,263 (<i>b'</i>)
1,745 (<i>c'</i>)	—	1,236 (<i>a</i>)
1,736 (<i>c'</i>)	—	1,245 (<i>a</i>)
2,736 (<i>c</i>)	2,145 (<i>a'</i>)	—
2,745 (<i>c</i>)	2,136 (<i>a'</i>)	—
—	7,164 (<i>c'</i>)	7,235 (<i>c</i>)
—	7,153 (<i>c'</i>)	7,246 (<i>c</i>)
1,735 (<i>b</i>)	—	1,246 (<i>a'</i>)
1,746 (<i>b</i>)	—	1,235 (<i>a'</i>)

11. It was shown in paragraph 10 that the join of two Fregier points such as 7,136 (*b*) and 7,254 (*b'*) is a chord of the cubic and is also a generator of the quadric which contains the cubic and has the chords [34] and [56] as generators of the same system. In the same way it can be shown that the join of the same two Fregier points is a generator of the quadric containing the cubic and the chords [45] and [36] and of the quadric containing the cubic and the chords [15] and [23]. It follows that any chord of the cubic through two Fregier points is the common generator of three quadrics each containing the cubic and two chords joining two pairs of base points suitably chosen from six. The existence of this common generator of the three quadrics has been noticed by Cremona (*Opere Matematiche* I, *p.* 230) and by Baker (*Principles of Geometry*, III *p.* 135), but the identity of this common generator was not made. We note that for the quadrics defined by the cubic and the chords [34], [56] and [45], [36] and [15], [23] respectively the common generator and chord is the join of the points of intersection of the planes [134], [156], [236] and [234], [256], [145].

Deuxième Section

SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

Tables pour la calcul des doublets minces collés corrigés de l'aberration sphérique.

II. Valeurs de ρ_1 et de ρ_3

PAR

A. BIOT

1. Nous avons calculé autrefois la valeur de l'inverse ρ_2 du rayon de collage des doublets corrigée de l'aberration sphérique pour les proximités de l'objet (point sur l'axe) égales à -2 , $-3/2$, -1 , $-1/2$, 0 , $+1/2$, $+1$ et les valeurs des indices comprises entre 1.50 et 1.66. Nous avons publié en même temps la valeur, pour chacun de ces doublets, de la deuxième proximité pour laquelle ils sont corrigés, ainsi que des tables supplémentaires permettant de calculer la valeur de l'aberration sphérique présentée par ces doublets pour une proximité quelconque ⁽¹⁾. Pour simplifier l'emploi de ces tables, nous les complétons ici en donnant, pour chacun des doublets qui y sont considérés, les valeurs ρ_1 et ρ_3 des inverses du premier et du dernier rayon de courbure numérotés dans le sens de propagation de la lumière. Nos nouveaux calculs nous ayant donné l'occasion de vérifier nos anciens résultats, nous avons découvert dans ceux-ci quelques erreurs de transcription. Les corrections à introduire dans les tableaux autrefois donnés des valeurs de ρ_2 et ϖ_2 sont indiquées en notes dans le tableau ci-dessous des valeurs de ρ_1 .

⁽¹⁾ *Ann. Soc. Sc. Brux.*, LXVIII, 1, 167-174. Errata, id., LXXII, 1, 57.

2. *Formules.* Nous avons rappelé déjà les définitions de ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Rappelons encore que n_1 et n_2 sont les indices de réfraction des deux lentilles dans l'ordre de propagation de la lumière et que φ_1 et φ_2 sont les inverses des longueurs focales de ces lentilles. Des relations classiques donnent dans ces conditions, la longueur focale du doublet étant égale à l'unité,

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1$$

$$\varphi_1 = (n_1 - 1) (\rho_1 - \rho_2) \dots \rho_1 = \varphi_1 / (n_1 - 1) + \rho_2$$

$$\varphi_2 = (n_2 - 1) (\rho_2 - \rho_3) \dots \rho_3 = -\varphi_2 / (n_2 - 1) + \rho_2$$

d'où ρ_1 et ρ_3 quand on connaît n_1, n_2 et φ_1 (tables publiées).

Nous croyons utile de récrire ici la relation qui donne ρ_2

$$\rho_2 = [-B + 2(\varphi_1 + \varpi) (A + 1) \pm$$

$$\sqrt{B^2 - 4AC + 4(\varphi_1 + \varpi) (AD - B) + 4(\varphi_1 + \varpi)^2}] / 2A$$

A, B, C, D dépendent des n et des φ . En particulier on a

$$C = \frac{n_1^2}{(n_1 - 1)^2} \varphi_1^3 + \frac{n_2^2}{(n_2 - 1)^2} \varphi_2^3$$

TABLEAU IV
Valeurs de ρ_1

$\frac{n_2}{n_1}$	1.54					1.58									
$\frac{\omega_1}{\varphi_1}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	
1.50	lim	-1.1953	-0.5028	0.1984	0.9074	1.6242	2.3491	3.0833	-1.1870	-0.4958	0.2041	0.9120	1.6278	2.3520	3.0878
	3	0.2999	0.3242	0.9919	1.7094	2.4807	3.2807	4.1163	0.0992	0.7718	1.4725	2.2017	2.9577	3.7379	4.5388
		2.2562	1.4642	-0.7157	-0.0169	0.6337	1.2442	1.8249	2.8352	-2.1026	-1.3983	0.7223	-0.0732	0.5518	1.1560
	4	0.5306	1.2134	1.9171	2.6418	3.3869	4.1512	4.9333	1.0687	1.7742	2.4935	3.2263	3.9721	4.7302	5.4999
		3.5076	2.7800	2.0734	-1.3878	-0.7226	-0.0766	0.5516	-4.5117	-3.8229	-3.1478	-2.4863	-1.8377	-1.2015	-0.5768
1.50	5	1.3425	2.0447	2.7598	3.4879	4.2285	4.9812	5.7456	2.0375	2.7559	3.4825	4.2175	4.9603	5.7109	6.4688
		4.9199	-4.2174	3.5281	-2.8516	-2.1876	-1.5358	-0.8956	6.4754	5.8097	5.1523	4.5030	3.8618	3.2282	2.6020
	(1)														
	6	2.1749	2.8867	3.6079	4.3380	5.0769	5.8242	6.5798	3.0252	3.7502	4.4810	5.2172	5.9588	6.7057	7.4577
		6.5246	-5.8378	5.1600	4.4912	-3.8310	-3.1795	-2.5360	-8.7241	-8.0748	-7.4311	-6.7930	-6.1602	-5.5326	-4.9102
1.54								lim	-1.2693	-0.5745	0.1293	0.8412	1.5614	2.2899	3.0282
	(1)	$\rho_2 =$	9.8251	$\varpi_2 =$	4.8478			3	0.4786	0.1278	0.7844	1.5031	2.2821	3.1078	3.9646
	(2)		4.1221		inchange				2.1899	-1.3733	-0.6070	0.0972	0.7411	1.3384	1.9044
	(3)		6.7994		id.			4	0.2865	0.9651	1.6682	2.3958	3.1473	3.9210	4.7148
	(4)		2.3584		id.				-3.3031	-2.5646	-1.8505	1.1610	0.4954	0.1480	0.7714
	(5)		7.2976		9.0372			1.54	0.2865	0.9651	1.6682	2.3958	3.1473	3.9210	4.7148
	(6)		-19.5990		-10.4058			5	1.0357	1.7350	2.4515	3.1831	3.9292	4.6892	5.4625
	(7)		4.5822		-1.0548				4.5477	-3.8396	-3.1446	2.4647	1.7993	1.1478	0.5097
	(8)		5.8734		inchange			6	1.8062	2.5139	3.2374	3.9713	4.7153	5.4691	6.2323
	(9)		6.5925		id.				5.9674	-5.2691	-4.5866	3.9145	3.2525	2.6003	1.9576
(10)		6.2942		id.											

TABLEAU IV (suite)
Valeurs de ρ_1

$\frac{n_2}{n_1}$	1.62						1.66								
$\frac{\varpi_1}{\varphi_1}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	
1.50	lim	- 1.1766	- 0.4855	+ 0.2137	+ 0.9207	+ 1.6353	+ 2.3582	+ 3.0905	-	0.4741	+ 0.2246	+ 0.9316	+ 1.6440	+ 2.3654	+ 3.0958
	3	+ 0.3316	+ 1.0233	+ 1.7371	+ 2.4727	+ 3.2285	+ 4.0028	+ 4.7934	+ 0.4924	+ 1.1961	+ 1.9185	+ 2.6589	+ 3.4161	+ 4.1884	+ 4.9745
	-	- 3.1817	- 2.4782	- 1.7970	- 1.1374	- 0.4981	+ 0.1228	+ 0.7273	- 3.4082	- 2.7259	- 2.0623	- 1.4166	- 0.7877	- 0.1740	+ 0.4260
	4	+ 1.3942	+ 2.1166	+ 2.8387	+ 3.5762	+ 4.3243	+ 5.0814	+ 5.8474	+ 1.6231	+ 2.3479	+ 3.0814	+ 3.8233	+ 4.5732	+ 5.3307	+ 6.0954
	-	- 5.1434	- 4.4855	- 3.8273	- 3.1853	- 2.5524	- 1.9292	- 1.3149	- 5.5634	- 4.9204	- 4.2862	- 3.6603	- 3.0424	- 2.4321	- 1.8290
	5	+ 2.4564	+ 3.1834	+ 3.9167	+ 4.6561	+ 5.4013	+ 6.1523	+ 6.9087	+ 2.7509	+ 3.4841	+ 4.2223	+ 4.9653	+ 5.7129	+ 6.4649	+ 7.2213
1.54	6	+ 7.4566	+ 6.8171	+ 6.1838	+ 5.5567	+ 4.9354	+ 4.3199	+ 3.7098	+ 8.1033	+ 7.4854	+ 6.8724	+ 6.2642	+ 5.6606	+ 5.0614	+ 4.4662
	-	- 3.5332	- 4.2655	- 5.0018	- 5.7421	- 6.4863	- 7.2341	- 7.9857	+ 3.8894	+ 4.6270	+ 5.3676	+ 6.1112	+ 6.8578	+ 7.6072	+ 8.3593
	-	- 10.0992	- 9.4778	- 8.8604	- 8.2470	- 7.6375	- 7.0316	- 6.4295	- 10.9914	- 10.3929	- 9.7975	- 9.2051	- 8.6156	- 8.0290	- 7.4450
	lim	- 1.2590	- 0.5675	+ 0.1350	+ 0.8458	+ 1.5648	+ 2.2926	+ 3.0285	- 1.2509	- 0.5575	+ 0.1443	+ 0.8541	+ 1.5740	+ 2.3003	+ 3.0346
	3	- 0.1095	+ 0.5560	+ 1.2546	+ 1.9869	+ 2.7509	+ 3.5427	+ 4.3577	+ 0.1063	+ 0.7940	+ 1.5077	+ 2.2479	+ 3.0099	+ 3.7939	+ 4.5963
	-	- 2.7025	- 1.9560	- 1.2438	- 0.5628	+ 0.0852	+ 0.7055	+ 1.3025	- 3.0091	- 2.2946	- 1.6061	- 0.9432	- 0.3039	+ 0.3142	+ 0.9140
1.54	4	+ 0.7860	+ 1.4907	+ 2.2115	+ 2.9480	+ 3.6996	+ 4.4654	+ 5.2443	+ 1.0905	+ 1.8080	+ 2.5379	+ 3.2799	+ 4.0333	+ 4.7974	+ 5.5717
	-	- 4.1859	- 3.4897	- 2.8091	- 2.1442	- 1.4943	- 0.8587	- 0.2362	- 4.7455	- 4.0754	- 3.4178	- 2.7722	- 2.1380	- 1.5146	- 0.9014
	5	+ 1.6827	+ 2.4023	+ 3.1317	+ 3.8707	+ 4.6189	+ 5.3759	+ 6.1414	+ 2.0768	+ 2.8060	+ 3.5426	+ 4.2863	+ 5.0368	+ 5.7939	+ 6.5573
	-	- 5.9166	- 5.2449	- 4.5830	- 3.9306	- 3.2874	- 2.6531	- 2.0272	- 6.7859	- 6.1412	- 5.5038	- 4.8736	- 4.2502	- 3.6333	- 3.0227
	6	+ 2.5991	+ 3.3266	+ 4.0607	+ 4.8012	+ 5.5479	+ 6.3007	+ 7.0595	+ 3.0790	+ 3.8135	+ 4.5545	+ 5.2993	+ 6.0486	+ 6.8022	+ 7.5600
	-	- 7.8940	- 7.2397	- 6.5920	- 5.9507	- 5.3157	- 4.6868	- 4.0633	- 9.1139	- 8.4879	- 7.8669	- 7.2504	- 6.6384	- 6.0308	- 5.4273

TABLEAU IV (suite)
Valeurs de ρ_1

1.62										1.66									
$\frac{n_2}{n_1}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1					
$\frac{w_1}{\varphi_1}$																			
lim	1.3342	0.6370	0.0696	0.7846	1.5076	2.2396	2.9819	1.3258	0.6299	0.0752	0.7888	1.5110	2.2421	2.9840					
3	0.6289	0.0439	0.5968	1.3159	2.1118	2.9607	3.8400	0.2876	0.3705	1.0648	1.8001	2.5726	3.3768	4.2063					
	2.1431	1.2986	0.5098	0.2006	0.8342	1.4148	1.9650	2.5990	1.8384	1.1137	0.4302	0.2161	0.8306	1.4200					
4	0.0783	0.7550	1.4538	2.1842	2.9422	3.7257	4.5314	0.5436	1.2469	1.9688	2.7089	3.4663	4.2399	5.0283					
1.58	3.1405	2.3904	1.6684	0.9750	0.3092	0.3311	0.9491	3.9235	3.2185	2.5320	1.8637	1.2128	0.5780	0.0419					
5	0.7691	1.4692	2.1867	2.9215	3.6731	4.4406	5.2231	1.3775	2.0981	2.8299	3.5728	4.3262	5.0898	5.8630					
	4.2509	3.5327	2.8326	2.1485	1.4819	0.8311	0.1953	5.4618	4.7839	4.1174	3.4618	2.8168	2.1815	1.5567					
6	1.4802	2.1936	2.9197	3.6557	4.4060	5.1661	5.9371	2.2323	2.9619	3.6990	4.4437	5.1955	5.9543	6.7197					
	5.5058	4.8063	4.1196	3.4437	2.7801	2.1273	1.4855	7.2167	6.5573	5.9055	5.2612	4.6240	3.9938	3.3703					
lim	1.3915	0.6921	0.0181	0.7351	1.4613	2.1955	2.9427	1.3915	0.6921	0.0181	0.7351	1.4613	2.1955	2.9427					
3	0.7557	0.1964	0.4203	1.1384	1.9578	2.8345	3.7374	0.7557	0.1964	0.4203	1.1384	1.9578	2.8345	3.7374					
	2.1116	1.2350	0.4158	0.3020	0.9185	1.4777	2.0107	2.1116	1.2350	0.4158	0.3020	0.9185	1.4777	2.0107					
4	0.0868	0.5782	1.2780	2.0094	2.7645	3.5643	4.3808	0.0868	0.5782	1.2780	2.0094	2.7645	3.5643	4.3808					
1.62	2.9903	2.2295	1.5006	0.8046	0.1409	0.4949	1.1057	2.9903	2.2295	1.5006	0.8046	0.1409	0.4949	1.1057					
5	0.5404	1.2386	1.9628	2.6948	3.4518	4.2270	5.0188	0.5404	1.2386	1.9628	2.6948	3.4518	4.2270	5.0188					
	4.0068	3.2802	2.5735	1.8865	1.2187	0.5694	0.0641	4.0068	3.2802	2.5735	1.8865	1.2187	0.5694	0.0641					
6	1.2024	1.9157	2.6432	3.3832	4.1384	4.9052	5.6860	1.2024	1.9157	2.6432	3.3832	4.1384	4.9052	5.6860					
	5.1306	4.4243	3.7324	3.0537	2.3883	1.7356	1.0968	5.1306	4.4243	3.7324	3.0537	2.3883	1.7356	1.0968					

TABLEAU V
Valeurs de ρ_8

$\frac{n_2}{n_1}$		1.54						1.58							
$\frac{m_1}{q_1}$		-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1
lim		3.4008	-2.7307	-2.0390	-1.3302	-0.6053	0.1370	0.9017	-3.4988	-2.8372	-2.1486	-1.4388	-0.7089	0.0428	0.8229
3		2.5962	-1.9721	-1.3044	-0.5869	+0.1844	0.9844	1.8200	-2.4525	-1.7799	-1.0792	0.3500	0.4060	1.1862	1.9871
		4.5525	3.7605	3.0120	2.3132	1.6626	1.0521	0.4714	-5.3869	4.6543	-3.9500	-3.2740	-2.6249	-1.9999	-1.3957
4		1.9138	-1.2310	-0.5273	0.1974	0.9425	1.7068	2.4889	-1.7589	-1.0534	0.3341	0.3987	1.1445	1.9026	-2.6723
lim		5.9520	5.2244	4.5178	3.8322	3.1670	2.5210	1.8928	-7.3393	-6.6505	-5.9754	-5.3139	-4.6653	-4.0291	-3.4044
5		1.2501	-0.5479	0.1672	0.8953	1.6359	2.3886	3.1530	-1.0659	-0.3475	0.3791	1.1141	1.8569	2.6075	3.3654
		7.5125	6.8100	6.1207	5.4442	4.7802	4.1284	3.4882	-9.5788	-8.9131	-8.2557	-7.6064	-6.9652	-6.3316	-5.7054
6		0.5658	0.1460	0.8672	1.5973	2.3362	3.0835	3.8391	0.3541	0.3709	1.1017	1.8379	2.5795	3.3264	4.0784
		9.2653	8.5785	7.9007	7.2319	6.5717	5.9202	5.2767	-12.1034	-11.4541	-10.8104	-10.1723	-9.5395	-8.9119	-8.2895
lim		3.3025	-2.6315	-1.9375	-1.2252	-0.4976	0.2486	1.0186	3.3025	-2.6315	-1.9375	-1.2252	-0.4976	0.2486	1.0186
3		2.5859	-1.9795	-1.3229	-0.6042	0.1748	1.0005	1.8573	-2.5859	-1.9795	-1.3229	-0.6042	0.1748	1.0005	1.8573
		4.2972	3.4806	2.7143	2.0101	1.3662	0.7689	0.2029	-4.2972	-3.4806	-2.7143	-2.0101	-1.3662	-0.7689	-0.2029
4		1.9485	-1.2699	-0.5668	0.1608	0.9123	1.6860	2.4798	-1.9485	-1.2699	-0.5668	0.1608	0.9123	1.6860	2.4798
		5.5381	-4.7996	-4.0855	-3.3960	-2.7304	-2.0870	-1.4636	-5.5381	-4.7996	-4.0855	-3.3960	-2.7304	-2.0870	-1.4636
5		1.3270	-0.6277	0.0888	0.8204	1.5665	2.3265	3.0998	-1.3270	-0.6277	0.0888	0.8204	1.5665	2.3265	3.0998
		6.9104	-6.2023	-5.5073	-4.8274	-4.1620	-3.5105	-2.8724	-6.9104	-6.2023	-5.5073	-4.8274	-4.1620	-3.5105	-2.8724
6		0.6842	0.0235	0.7470	1.4809	2.2249	2.9787	3.7419	-0.6842	0.0235	0.7470	1.4809	2.2249	2.9787	3.7419
		8.4578	-7.7595	-7.0770	-6.4049	-5.7429	-5.0907	-4.4480	-8.4578	-7.7595	-7.0770	-6.4049	-5.7429	-5.0907	-4.4480

TABLEAU V (suite)
Valeurs de ρ_3

$\frac{n_2}{n_1}$		1.62								1.66							
$\frac{\varpi_1}{\varphi_1}$		-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1		
1.50	lim	-3.5736	-2.9153	-2.2272	-1.5153	-0.7813	-0.0225	+0.7684	-3.6362	-2.9788	-2.2898	-1.5748	-0.8375	0.0729	+0.7265		
	3	-2.4426	-1.7509	-1.0371	-0.3015	+0.4543	+1.2286	+2.0192	-2.4773	-1.7736	-1.0512	-0.3108	0.4464	+1.2187	+2.0048		
		-5.9559	-5.2524	-4.5712	-3.9116	-3.2723	-2.6514	-2.0469	-6.3779	-5.6956	-5.0320	-4.3863	-3.7574	-3.1437	-2.5437		
	4	-1.7671	-1.0447	-0.3226	+0.4149	+1.1630	+1.9201	+2.6861	-1.8314	-1.1066	-0.3731	+0.3688	+1.1187	+1.8762	+2.6409		
		-8.3047	-7.6468	-6.9886	-6.3466	-5.7137	-5.0905	-4.4762	9.0179	-8.3749	-7.7407	-7.1148	-6.4969	-5.8866	-5.2835		
1.54	5	-1.0920	-0.3650	+0.3683	+1.1077	+1.8529	+2.6039	+3.3603	-1.1885	-0.4553	+0.2829	+1.0259	+1.7735	+2.5255	+3.2819		
		-11.0050	-10.3655	-9.7322	-9.1051	-8.4838	-7.8683	-7.2582	-12.0427	-11.4248	-10.8118	-10.2036	-9.6000	-9.0008	-8.4056		
	6	-0.4023	+0.3300	+1.0663	+1.8066	+2.5508	+3.2986	+4.0502	-0.5348	+0.2028	+0.9434	+1.6870	+2.4336	+3.1830	+3.9351		
		-14.0347	-13.4133	-12.7959	-12.1825	-11.5730	-10.9671	-10.3650	-15.4156	-14.8171	-14.2217	-13.6293	-13.0398	-12.4532	-11.8692		
	lim	-3.3881	-2.7282	-2.0377	-1.3252	-0.5921	0.1637	0.9480	-3.4577	-2.7998	-2.1099	-1.3955	-0.6561	+0.1066	+0.9022		
1.54	3	-2.4393	-1.7738	-1.0752	-0.3429	+0.4211	+1.2129	+2.0279	-2.4190	-1.7313	-1.0176	-0.2784	-0.4846	+1.2686	+2.0710		
		-5.0323	-4.2858	-3.5736	-2.8926	-2.2446	-1.6243	-1.0273	-5.5344	-4.8199	-4.1314	-3.4685	-2.8292	-2.2111	-1.6113		
	4	-1.7827	-1.0780	-0.3572	+0.3793	+1.1309	+1.8967	+2.6756	-1.7714	-1.0539	-0.3240	+0.4180	+1.1714	+1.9355	+2.7098		
		-6.7546	-6.0584	-5.3778	-4.7129	-4.0630	-3.4274	-2.8049	-7.6074	-6.9373	-6.2797	-5.6341	-4.9999	-4.3765	-3.7633		
	5	-1.1250	-0.4054	+0.3240	+1.0630	+1.8112	+2.5682	+3.3337	-1.1219	-0.3927	+0.3439	+1.0876	+1.8381	+2.5952	+3.3586		
1.54		-8.7243	-8.0526	-7.3907	-6.7383	-6.0951	-5.4608	-4.8349	-9.9846	-9.3399	-8.7025	-8.0723	-7.4489	-6.8320	-6.2214		
	6	-0.4475	+0.2800	+1.0141	+1.7546	+2.5013	+3.2541	+4.0129	-0.4563	+0.2782	+1.0192	+1.7640	+2.5133	+3.2669	+4.0247		
		-10.9406	-10.2863	-9.6386	-8.9973	-8.3623	-7.7334	-7.1099	-12.6492	-12.0232	-11.4022	-10.7857	-10.1737	-9.5661	-8.9626		

TABLEAU V (suite)

Valeurs de ρ_3

$\frac{n_2}{n_1}$		1.66					
		1.62					
$\frac{\varpi_1}{\varphi_1}$		-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1
lim		- 3.2189	- 2.5470	- 1.8507	- 1.1362	- 0.4049	+ 1.1206
3		- 2.5755	- 1.9905	- 1.3498	- 0.6307	+ 0.1652	+ 1.8934
		- 4.0897	- 3.2452	- 2.4564	- 1.7460	- 1.1124	+ 0.0184
4		- 1.9796	- 1.3029	- 0.6041	+ 0.1263	+ 0.8843	+ 2.4735
		- 5.1984	- 4.4483	- 3.7263	- 3.0329	- 2.3671	- 1.1088
5		- 1.4000	- 0.6999	+ 0.0176	+ 0.7524	+ 1.5040	+ 3.0540
		- 6.4200	- 5.7018	- 5.0011	- 4.3176	- 3.6510	- 2.3644
6		- 0.8001	- 0.0867	+ 0.6394	+ 1.3764	+ 2.1857	+ 3.6568
		- 7.7861	- 7.0866	- 6.3999	- 5.7240	- 5.0604	- 4.4076
lim		- 3.1470	- 2.4745	- 1.7758	- 1.0584	- 0.3241	+ 0.4284
3		- 2.5641	- 2.0048	- 1.3881	- 0.6700	+ 0.1494	+ 1.9290
		- 3.9200	- 3.0434	- 2.2242	- 1.5064	+ 0.8899	+ 0.2023
4		- 1.9929	- 1.3279	- 0.6281	+ 0.1033	+ 0.8584	+ 2.4747
		- 4.8964	- 4.1356	- 3.4067	- 2.7107	- 2.0470	- 0.8004
5		- 1.4635	- 0.7653	- 0.0411	+ 0.6909	+ 1.4479	+ 3.0146
		- 6.0107	- 5.2841	- 4.5774	- 3.8904	- 3.2226	- 1.9398
6		- 0.8992	- 0.1859	+ 0.5416	+ 1.2816	+ 2.0368	+ 3.5844
		- 7.2322	- 6.5259	- 5.8340	- 5.1553	- 4.4899	- 3.1984

Tables pour le calcul des doublets minces
collés corrigés de l'aberration sphérique.

III. Valeurs de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \varpi_2, A + 2$ pour $n_2 = 1,70$
et $n_1 = 1,50; 1,54; 1,58; 1,62; 1,66$

PAR

A. BIOT

Les présentes tables complètent celles que nous avons publiées sous le même titre général ⁽¹⁾. L'introduction de nouveaux verres d'indice et de ν élevés offre à l'opticien de nouvelles possibilités intéressantes qu'il convient d'utiliser au maximum, de sorte que les limites adoptées pour les indices dans nos tables précédentes doivent être revues et étendues. C'est ce que nous faisons ici.

Les notations et disposition sont les mêmes que dans les travaux cités plus haut.

Les calculs ont été effectués au Comité d'Etude et d'Exploitation des Calculateurs Electroniques (C.E.C.E.) sur la machine IRSIA - FNRS. La programmation a aussi été réalisée par le même organisme. Nous sommes heureux de pouvoir remercier ici M. Belevitch, Directeur du C.E.C.E. à qui nous devons de pouvoir publier les tableaux qui suivent.

⁽¹⁾ *Ann. Soc. Sc. Brux.*, LXVIII, 167 et ci-devant.

$$n_2 = 1.70$$

n_1		Valeurs de $-\rho_2$						Valeurs de ρ_1								
		$\frac{\pi_1}{\varphi_1}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1
1.50	(lim)	(1.9414)	(1.9993)	(2.0123)	(1.9915)	(1.9395)	(1.8522)	(1.7155)								
	lim	5.0363	4.4608	3.7886	3.0420	2.2259	1.3316	0.3297								
	3	5.3880	4.6753	3.9463	3.2017	2.4427	1.6706	0.8868								
		9.5580	8.8929	8.2442	7.6110	6.9922	6.3865	5.7925								
	4	6.2042	5.4732	4.7348	3.9893	3.2372	2.4787	1.7142								
		13.8437	13.2181	12.5999	11.9887	11.3842	10.7861	10.1939								
1.54	5	7.0262	6.2879	5.5456	4.7994	4.0495	3.2961	2.5391								
		18.5291	17.9297	17.3342	16.7427	16.1548	15.5706	14.9897								
	6	7.8407	7.0987	6.3544	5.6078	4.8598	4.1079	3.3549								
		23.5663	22.9875	22.4111	21.8369	21.2650	20.6953	20.1276								
	(lim)	(1.9999)	(2.0866)	(2.1119)	(2.0935)	(2.0351)	(1.9315)	(1.7611)								
	lim	4.9434	4.4107	3.7562	3.0132	2.1888	1.2721	0.2221								
1.54	3	5.2994	4.5981	3.8747	3.1303	2.3664	1.5851	0.7885								
		8.7661	8.0742	7.4044	6.7556	6.1262	5.5143	4.9177								
	4	6.1018	5.3756	4.6392	3.8930	3.1375	2.3733	1.6009								
		12.5280	11.8791	11.2403	10.6113	9.9916	9.3806	8.7779								
	5	6.9043	6.1683	5.4265	4.6790	3.9262	3.1682	2.4053								
		16.6253	16.0026	15.3857	14.7744	14.1685	13.5678	12.9719								
1.54	6	7.6945	6.9534	6.2087	5.4605	4.7089	3.9539	3.1958								
		21.0280	20.4254	19.8265	19.2310	18.6390	18.0503	17.4647								
	(lim)	(1.9999)	(2.0866)	(2.1119)	(2.0935)	(2.0351)	(1.9315)	(1.7611)								
	lim	4.9434	4.4107	3.7562	3.0132	2.1888	1.2721	0.2221								
	3	5.2994	4.5981	3.8747	3.1303	2.3664	1.5851	0.7885								
		8.7661	8.0742	7.4044	6.7556	6.1262	5.5143	4.9177								
1.54	4	6.1018	5.3756	4.6392	3.8930	3.1375	2.3733	1.6009								
		12.5280	11.8791	11.2403	10.6113	9.9916	9.3806	8.7779								
	5	6.9043	6.1683	5.4265	4.6790	3.9262	3.1682	2.4053								
		16.6253	16.0026	15.3857	14.7744	14.1685	13.5678	12.9719								
	6	7.6945	6.9534	6.2087	5.4605	4.7089	3.9539	3.1958								
		21.0280	20.4254	19.8265	19.2310	18.6390	18.0503	17.4647								

$$n_2 = 1.70$$

		Valeurs de $-\rho_2$						Valeurs de ρ_1								
n_1	$\frac{\pi_1}{\varphi_1}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	
1.58	(lim) lim	(2.0786) 4.8995	(2.2076) 4.4264	(2.2507) 3.7962	(2.2362) 3.0587	(2.1702) 2.2241	(2.0451) 1.2787	(1.8281) 0.1642		1.3158	0.6201	0.0842	0.7968	1.5176	2.2473	2.9876
	3	5.2591 8.0440	4.5765 7.3176	3.8635 6.6215	3.1207 5.9551	2.3505 5.3163	1.5562 4.7015	0.7417 4.1069		0.0867 2.8716	0.5959 2.1451	1.3089 - 1.4490	2.0517 0.7827	2.8219 - 0.1439	3.6162 0.4709	4.4307 1.0655
	4	6.0673 11.3178	5.3497 10.6407	4.6177 9.9780	3.8719 9.3293	3.1128 8.6936	2.3415 8.0703	1.5589 7.4583		0.8292 4.4212	1.5468 3.7441	2.2788 - 3.0815	3.0247 - 2.4327	3.7837 - 1.7971	4.5550 - 1.1737	5.3377 - 0.5617
	5	6.8710 14.8577	6.1399 14.2077	5.4002 13.5661	4.6523 12.9328	3.8966 12.3073	3.1333 11.6893	2.3630 11.0785		1.7497 6.2370	2.4808 5.5870	3.2205 - 4.9454	3.9684 - 4.3121	4.7241 - 3.6866	5.4873 - 3.0687	6.2577 - 2.4578
	6	7.6573 18.6509	6.9191 18.0205	6.1753 17.3956	5.4262 16.7761	4.6719 16.1618	3.9126 15.5524	3.1484 14.9479		2.6875 8.3061	3.4257 7.6757	4.1695 - 7.0508	4.9186 - 6.4313	5.6729 - 5.8169	6.4323 - 5.2076	7.1964 - 4.6031
	1.62	(lim) lim	(2.2016) 4.9340	(2.3985) 4.5534	(2.4695) 3.9601	(2.4620) 3.2317	(2.3856) 2.3834	(2.2293) 1.3968	(1.9410) 0.1860		1.3830	0.6848	0.0229	0.7394	1.4644	2.1989
3		5.2788 7.3571	4.6318 6.5787	3.9407 5.8444	3.2027 5.1570	2.4212 4.5131	1.6039 3.9050	0.7596 3.3240		0.4401 2.5184	0.2069 - 1.7400	0.8980 - 1.0057	1.6360 - 0.3183	2.4175 0.3256	3.2348 0.9337	4.0791 1.5147
4		6.1182 10.1602	5.4169 9.4464	4.6943 8.7539	3.9508 8.0822	3.1875 7.4304	2.4060 6.7968	1.6079 6.1797		0.3334 3.7086	1.0347 - 2.9948	1.7573 - 2.3023	2.5008 - 1.6306	3.2641 - 0.9788	4.0456 - 0.3452	4.8437 0.2719
5		6.9522 13.1513	6.2311 12.4670	5.4971 11.7957	4.7505 11.1370	3.9918 10.4904	3.2216 9.8551	2.4407 9.2307		1.1123 5.0868	1.8334 - 4.4025	2.5674 - 3.7312	3.3141 - 3.0725	4.0728 - 2.4258	4.8429 - 1.7906	5.6238 - 1.1662
6		7.7644 16.3342	7.0330 15.6695	6.2929 15.0136	5.5443 14.3662	4.7875 13.7270	4.0227 13.0957	3.2505 12.4719		1.9130 6.6567	2.6444 - 5.9921	3.3845 - 5.3362	4.1331 - 4.6888	4.8900 - 4.0496	5.6547 - 3.4183	6.4269 - 2.7945

$$n_2 = 1.70$$

Valeurs de $-\rho_2$								Valeurs de ρ_1										
n_1	$\frac{\varpi_1}{\varphi_1}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1			
1.66	(lim) lim	(2.4633) 5.1751	(2.7948) 4.9756	(2.9205) 4.4541	(2.9280) 3.7447	(2.8338) 2.8727	(2.6201) 1.8107	(2.1954) 0.4172	-	1.4428	-	0.7410	-	0.0290	0.6916	1.4208	2.1592	2.9093
	3	5.4085 6.6380	4.8800 5.7243	4.3049 4.8572	3.5915 4.1284	2.7318 3.5459	1.8203 3.0153	0.8929 2.5005	-	0.8630 -	-	0.3345 1.1788	-	0.2406 0.3117	0.9540 0.4170	1.8136 0.9996	2.7252 1.5302	3.6526 2.0450
1.66	4	6.3169 8.9663	5.6558 8.1907	4.9585 7.4512	4.2233 6.7498	3.4516 6.0848	2.6475 5.4521	1.8166 4.8464	-	0.2563 -	-	0.4048 2.1301	-	1.1021 1.3906	1.8373 0.6892	2.6091 0.0242	3.4131 0.6085	4.2440 1.2142
	5	7.2349 11.3810	6.5391 10.6455	5.8206 9.9326	5.0797 9.2421	4.3171 8.5734	3.5342 7.9249	2.7328 7.2949	-	0.3408 -	-	1.0367 3.0697	-	1.7552 2.3568	2.4961 -	3.2587 0.9976	4.0416 -	4.8429 0.2809
1.66	6	8.1317 13.9095	7.4185 13.1965	6.6897 12.4992	5.9454 11.8173	5.1862 11.1504	4.4127 10.4977	3.6258 9.8585	-	0.9592 -	-	1.6724 4.1056	-	2.4012 3.4083	3.1455 -	3.9047 -	4.6782 -	5.4651 -
									-	4.8185	-	4.1056	-	3.4083	-	2.0595	-	0.7675

$$n_2 = 1.70$$

n_1	$\frac{\varpi_1}{Q_1}$	Valeurs de ρ_3					Valeurs de ϖ_3								
		-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1
1.50	lim	-3.6914	-3.0332	-2.3424	-1.6256	0.8837	0.1142	0.6924	-2.1786	-1.5788	-0.9872	-0.4011	0.1809	0.7598	1.3363
	3	-2.5309	-1.8182	-1.0891	-0.3445	0.4145	1.1865	1.9703	1.3457	1.9644	2.6088	3.2775	3.9688	4.6806	5.4109
		-6.7008	-6.0358	-5.3871	-4.7539	-4.1351	-3.5294	-2.9354	-5.1995	-4.6556	-4.1374	-3.6436	-3.1723	-2.7215	-2.2892
	4	-1.9185	-1.1875	-0.4491	0.2964	1.0485	1.8070	2.5715	4.4853	5.1430	5.8124	6.4930	7.1841	7.8854	8.5961
		-9.5580	-8.9324	-8.3141	-7.7030	-7.0985	-6.5004	-5.9082	-7.6131	-7.1224	-6.6433	-6.1754	-5.7181	-5.2708	-4.8331
1.54	5	-1.3119	-0.5736	0.1687	0.9148	1.6647	2.4182	3.1751	8.1089	8.7878	9.4732	10.1647	10.8622	11.5654	12.2740
		-12.8148	-12.2154	-11.6199	-11.0284	-10.4405	-9.8563	-9.2754	-10.2594	-9.8021	-9.3513	-8.9067	-8.4680	-8.0350	-7.6075
	6	-0.6978	0.0441	0.7884	1.5351	2.2839	3.0349	3.7880	12.1924	12.8863	13.5840	14.2855	14.9905	15.6990	16.4109
		-16.4235	-15.8447	-15.2682	-14.6941	-14.1222	-13.5524	-12.9848	-13.1133	-12.6819	-12.2543	-11.8304	-11.4101	-10.9932	-10.5798
	lim	-3.5150	-2.8583	-2.1677	-1.4512	0.7100	0.0586	0.8652	-2.2055	-1.6004	-1.0043	-0.4140	0.1721	0.7549	1.3351
1.54	3	-2.4423	-1.7409	-1.0176	-0.2731	0.4907	1.2720	2.0686	0.6787	1.2727	1.9010	2.5621	3.2535	3.9722	4.7147
		-5.9089	-5.2171	-4.5472	-3.8984	-3.2691	-2.6572	-2.0606	-4.7285	-4.1494	-3.6045	-3.0926	-2.6109	-2.1565	-1.7259
	4	-1.8161	-1.0899	-0.3535	0.3927	1.1482	1.9124	2.6848	3.2937	3.9348	4.5919	5.2644	5.9515	6.6523	7.3660
		-8.2423	-7.5933	-6.9546	-6.3256	-5.7059	-5.0949	-4.4921	-6.8039	-6.2841	-5.7804	-5.2921	-4.8184	-4.3583	-3.9112
	5	-1.1901	-0.4540	0.2878	1.0353	1.7881	2.5461	3.3090	6.2982	6.9628	7.6366	8.3193	9.0104	9.7098	10.4169
1.54		-10.9110	-10.2883	-9.6714	-9.0601	-8.4542	-7.8535	-7.2577	-9.0828	-8.5975	-8.1214	-7.6542	-7.1956	-6.7450	-6.3023
	6	-0.5517	0.1894	0.9341	1.6824	2.4340	3.1889	3.9470	9.6830	10.3633	11.0493	11.7410	12.4381	13.1404	13.8478
		-13.8851	-13.2825	-12.6836	-12.0882	-11.4961	-10.9074	-10.3218	-11.5526	-11.0929	-10.6390	-10.1907	-9.7478	-9.3101	-8.8775

$$n_2 = 1.70$$

Valeurs de ρ_3								Valeurs de ϖ_2						
$\frac{\varpi_1}{\rho_1}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1
lim	3.3588	2.7012	2.0095	1.2927	0.5524	0.2143	1.0187	-2.2320	-1.6219	-1.0213	-0.4266	0.1638	0.7508	1.3350
3	2.4020 5.1868	1.7193 4.4604	1.0064 3.7643	0.2636 3.0980	0.5067 2.4592	1.3009 1.8444	2.1154 1.2498	0.0457 4.2708	0.6039 3.6448	1.2090 3.0659	1.8603 2.5331	2.5542 2.0429	3.2853 1.5900	4.0478 1.1683
4	1.7816 7.0320	1.0640 6.3550	0.3320 5.6923	0.4139 5.0436	1.1729 4.4079	1.9442 3.7846	2.7268 3.1726	2.1683 6.0165	2.7869 5.4611	3.4280 4.9281	4.0907 4.4167	4.7739 3.9258	5.4763 3.4541	6.1964 3.0001
5	1.1567 9.1434	0.4256 8.4934	0.3141 7.8518	1.0620 7.2185	1.8177 6.5930	2.5809 5.9751	3.3513 5.3642	4.5874 7.9309	5.2334 7.4120	5.8928 6.9065	6.5650 6.4138	7.2496 5.9334	7.9459 5.4648	8.6534 5.0074
6	0.5145 11.5081	0.2237 10.8776	0.9675 10.2528	1.7166 9.6332	2.4710 9.0189	3.2303 8.4096	3.9944 7.8051	7.3072 10.0143	7.9704 9.5210	8.6422 9.0365	9.3226 8.5603	10.0111 8.0924	10.7075 7.6323	11.4115 7.1799
lim	3.2174	2.5555	1.8608	1.1430	0.4039	0.3594	1.1583	-2.2585	-1.6441	-1.0391	-0.4398	0.1552	0.7469	1.3356
3	2.4217 4.5000	1.7746 3.7216	1.0836 2.9872	0.3456 2.2998	0.4359 1.6560	1.2532 1.0479	2.0976 0.4668	-0.5911 3.7923	-0.0945 3.0934	0.4700 2.4623	1.1067 1.9035	1.8105 1.4117	2.5694 0.9751	3.3699 0.5801
4	1.8325 5.8745	1.1312 5.1607	0.4086 4.4682	0.3349 3.7965	1.0982 3.1447	1.8797 2.5111	2.6778 1.8940	1.0505 5.1998	1.6350 4.5960	2.2525 4.0251	2.9022 3.4865	3.5825 2.9785	4.2911 2.4988	5.0252 2.0446
5	1.2379 7.4370	0.5168 6.7528	0.2172 6.0815	0.9638 5.4227	1.7225 4.7761	2.4927 4.1409	3.2736 3.5164	2.8924 6.7303	3.5117 6.1682	4.1511 5.6261	4.8101 5.1036	5.4878 4.5998	6.1833 4.1138	6.8955 3.6445
6	0.6216 9.1913	0.1098 8.5267	0.8499 7.8708	1.5986 7.2233	2.3554 6.5841	3.1201 5.9528	3.8924 5.3291	4.9525 8.3993	5.5920 7.8638	6.2451 7.3418	6.9115 6.8332	7.5907 6.3373	8.2821 5.8537	8.9853 5.3819

$$n_2 = 1.70$$

Valeurs de ρ_3						Valeurs de ϖ_2								
$\frac{\varpi_1}{\varphi_1}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1
lim	3.0846	2.4116	1.7105	0.9904	0.2531	0.5038	1.2906	-2.2862	-1.6688	-1.0596	-0.4554	0.1451	0.7424	1.3367
3	-2.5513	-2.0228	-1.4477	-0.7343	0.1253	1.0369	1.9643	-1.3229	-1.0139	-0.6336	-0.0416	0.7742	1.6696	2.5891
	-3.7808	-2.8671	-2.0000	-1.2713	0.6887	0.1581	0.3567	-3.2048	-2.3062	-1.4790	-0.8635	-0.4718	-0.1596	0.1283
4	-2.0312	1.3700	-0.6728	0.0624	0.8342	1.6382	2.4692	-0.1775	0.3365	0.9060	1.5336	2.2173	2.9506	3.7250
1.66	-4.6806	3.9050	-3.1655	-2.4640	-1.7991	-1.1664	-0.5606	-4.2411	3.5515	-2.9174	-2.3414	-1.8215	-1.3512	-0.9220
5	-1.5207	-0.8248	-0.1063	0.6346	1.3972	2.1801	2.9814	1.0483	1.6178	2.2219	2.8606	3.5326	4.2357	4.9673
	-5.6667	4.9312	-4.2183	-3.5278	-2.8591	-2.2106	-1.5806	-5.3235	-4.6932	-4.0976	-3.5365	-3.0087	-2.5120	-2.0438
6	-0.9889	-0.2757	0.4532	1.1975	1.9567	2.7302	3.5171	2.4001	2.9984	3.6207	4.2668	4.9359	5.6270	6.3387
	-6.7666	-6.0536	-5.3563	-4.6745	-4.0075	-3.3549	-2.7156	-6.4968	-5.8989	-5.3252	-4.7752	-4.2482	-3.7431	-3.2588

n_1	φ_1	$A + 2$	$A + 2$ pour les φ_1 lim						
			-2	-3/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1
1.50	3	4.647058	4.481010	4.490088	4.492122	4.488869	4.480704	4.467016	4.445564
	4	4.803921							
	5	4.960784							
	6	5.117647							
1.54	3	4.543162	4.420917	4.431522	4.434609	4.432355	4.425225	4.412559	4.391728
	4	4.665393							
	5	4.787624							
	6	4.909854							
1.58	3	4.444527	4.362193	4.473728	4.377573	4.376280	4.370382	4.359203	4.339811
	4	4.533879							
	5	4.623231							
	6	4.712583							
1.62	3	4.350762	4.304377	4.315816	4.319942	4.319508	4.315070	4.305986	4.289238
	4	4.408859							
	5	4.466957							
	6	4.525054							
1.66	3	4.261516	4.246302	4.255700	4.259264	4.259475	4.256803	4.250747	4.238708
	4	4.289865							
	5	4.318214							
	6	4.346562							

Contribution à l'étude, par spectrométrie infrarouge, de la constitution de l'acide periodique H_5IO_6 et du comportement vibratoire du groupement hydroxyle du type I-OH

PAR

P. NATALIS (Liège), (*),

présenté par M. L. D'OR

SUMMARY

The infrared spectrum of solid paraperiodic acid H_5IO_6 has been recorded in the frequencies range $650-4000\text{ cm}^{-1}$ and it shows that the studied sample is not a hydrate. With the infrared spectrum of this compound and that of solid iodic acid HIO_3 , the characteristics of the bending vibrations of the I-OH hydroxyl group have been determined and compared with results about other OH hydroxyl groups.

On a longtemps confondu les deux substances isomères suivantes : l'acide paraperiodique H_5IO_6 et le dihydrate de l'acide métaperiodique $HIO_4 \cdot 2H_2O$.

De nombreux travaux ont contribué à tirer progressivement cette question au clair : mesures de conductivité électrique en solution ⁽¹⁾ ⁽²⁾, mesures de susceptibilité magnétique ⁽³⁾, étude des courbes de saturation ⁽⁴⁾, détermination par voie chimique de l'eau dans les hydrates ⁽⁵⁾, étude des periodates ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾, préparation de sels pentamétalliques, notamment Li_5IO_6 et Ag_5IO_6 ⁽⁸⁾. A ces travaux, il faut encore ajouter plusieurs études spectrales, par diffusion Raman sur H_5IO_6 ⁽⁹⁾, par diffraction de rayons X sur $(NH_4)_2H_3IO_6$ ⁽¹⁰⁾ et $Ag_3H_2IO_6$ ⁽¹¹⁾, qui ont montré que le complexe IO_6 a une symétrie octaédrique régulière. A part une étude assez ancienne faite dans le proche infrarouge avec des moyens limités ⁽¹²⁾, aucune détermination du spectre d'absorption infrarouge de H_5IO_6 n'a été entreprise jusqu'ici.

(*) Aspirant du F.N.R.S.

Dans le présent travail, nous nous sommes proposé d'examiner, par absorption infrarouge, le comportement vibratoire des groupements hydroxyles dans l'acide periodique de formule H_5IO_6 . Cette étude est susceptible de nous renseigner sur la nature des groupes OH de l'acide periodique, donc sur la présence éventuelle d'eau d'hydratation dans ce composé. En effet, la vibration de déformation des groupes I-OH hydroxyliques doit avoir une fréquence nettement plus basse que celle des groupes OH de l'eau, à cause de la masse élevée de l'atome I. Dans les cristaux hydratés, cette fréquence est toujours très voisine de 1640 cm^{-1} ⁽¹³⁾.

Nous nous sommes fixé un double but :

a) apporter éventuellement un argument supplémentaire à l'existence d'un acide periodique de formule H_5IO_6 différent de l'hydrate $\text{HIO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$;

b) comparer le comportement des vibrations du groupement hydroxyle du type I-OH avec celui des groupements métal-OH.

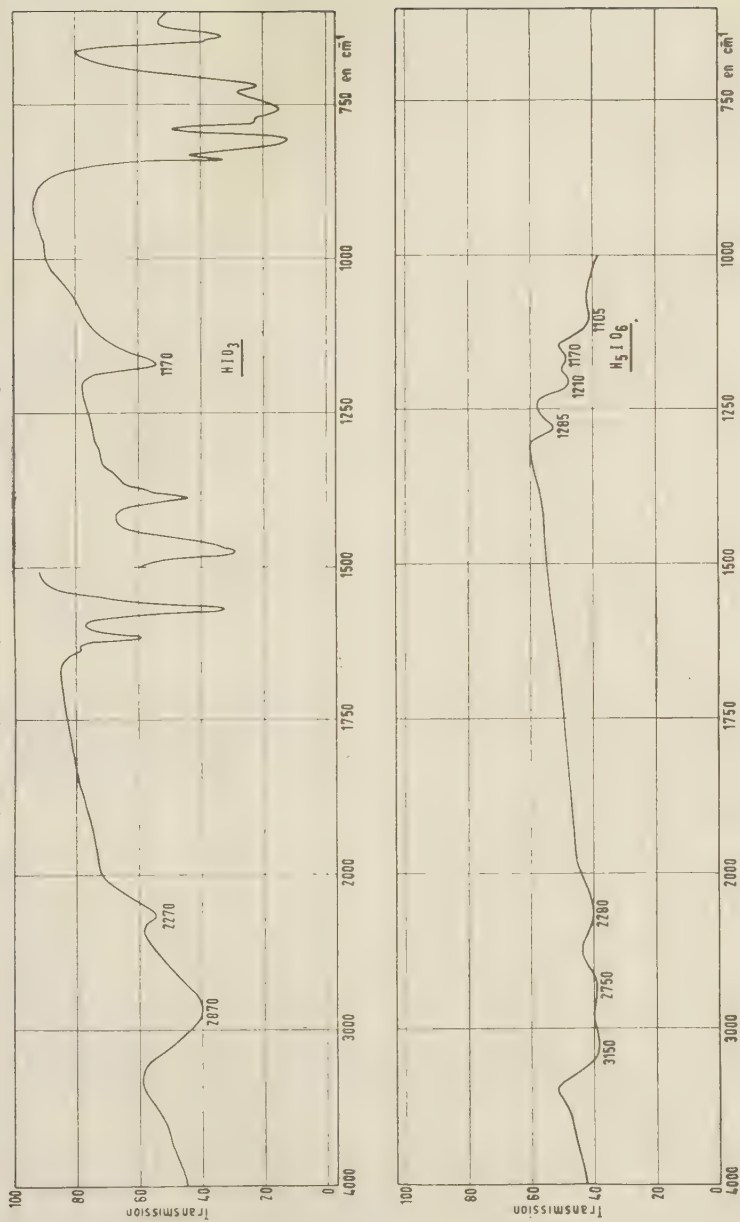
Le comportement des vibrations du groupement hydroxyle métal-OH a suscité plusieurs travaux récents sur des sels basiques et des hydroxydes à l'état solide, notamment ceux de Tarte ⁽¹⁴⁾ sur les sels basiques de cuivre, et de Hartert et Glemser ⁽¹⁵⁾ sur des hydroxydes et d'autres sels basiques. Ces auteurs ont montré l'existence d'une relation entre ν_{OH} , vibration de valence, et δ_{OH} , vibration de déformation des groupements hydroxyles de ces composés solides. Dans le cas présent, il est intéressant de voir si une telle relation peut être étendue à des composés du type I-OH.

PARTIE EXPÉRIMENTALE

Nous avons utilisé un échantillon d'acide periodique cristallisé de la firme Fluka; sa teneur en iode, déterminée par iodométrie, montre qu'il s'agit bien d'un composé de formule H_5IO_6 , et non pas de HIO_4 anhydre où la proportion d'iode est beaucoup plus élevée. Les spectres ont été déterminés à l'aide d'un spectromètre Perkin-Elmer à double faisceau équipé d'un prisme de NaCl, dans le domaine de fréquences allant de 650 à 4.000 cm^{-1} . Ils ont été pris sur la substance solide, à l'état de poudre finement broyée, disposée entre deux lames de fluorine (*).

(*) Nous n'avons pas pu prendre le spectre de l'acide periodique en utilisant une méthode classique de dispersion dans un milieu organique, à cause du caractère très oxydant de cet acide. On observait une oxydation presque immédiate du milieu dispersif.

Fig. 1. — Spectres infrarouges de HIO_3 et H_5IO_6



En vue de l'étude du comportement vibratoire du groupe I-OH, nous avons également déterminé le spectre infrarouge de l'acide iodique HIO_3 (échantillon pour analyse de la firme Merck). Les spectres ont été pris sur la substance solide pulvérisée, dispersée dans de la paraffine ou de l'hexachlorobutadiène, entre deux lames de sel gemme.

RÉSULTATS

1) *L'acide paraperiodique* H_5IO_6

Le spectre infrarouge de H_5IO_6 présente deux régions principales d'absorption (figure 1). La première comprend 3 bandes larges dont les maxima de fréquence sont environ 3150, 2750 et 2280 cm^{-1} . Dans la seconde, il y a 4 bandes à 1285, 1210, 1170 et 1105 cm^{-1} ; il n'existe pas de bande de déformation de l'eau dans la région de 1650 cm^{-1} .

2) *L'acide iodique* HIO_3

L'acide iodique HIO_3 possède 3 bandes principales correspondant à trois régions d'absorption qui se situent vers 2900 cm^{-1} , 1200 cm^{-1} et 700-850 cm^{-1} (figure 1).

Dans la première nous observons une bande large, unique, régulière, dont le maximum se trouve à 2870 cm^{-1} et une petite bande de fréquence 2270 cm^{-1} ; dans la deuxième une seule bande également, avec un maximum à 1170 cm^{-1} ; dans la troisième un ensemble complexe très intense.

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

1) *L'acide paraperiodique* H_5IO_6

a) Les bandes situées à 1285, 1210, 1170 et 1105 cm^{-1} correspondent aux vibrations de déformation δ_{OH} des groupes hydroxyles. Aucune bande qui aurait la fréquence de déformation de l'eau (1640 cm^{-1}) ou une fréquence voisine n'apparaît dans le spectre de H_5IO_6 . La substance étudiée n'est donc pas de la nature d'un hydrate.

b) Les bandes d'absorption 3150, 2750 et 2280 cm^{-1} correspondent aux vibrations de valence des groupements hydroxyles. La position de ces bandes indique que ces groupes OH sont engagés

dans des liaisons hydrogène et leur multiplicité montre que les hydroxyles sont de plusieurs types.

2) L'acide iodique HIO_3

La simplicité du spectre permet une attribution immédiate des fréquences. La bande de fréquence 2870 cm^{-1} correspond à la vibration de valence ν_{OH} , 1170 à la déformation δ_{OH} et la petite bande à 2270 cm^{-1} s'interprète aisément comme étant la première harmonique de la déformation δ_{OH} . Les bandes présentes dans la région $700\text{--}850\text{ cm}^{-1}$ doivent être attribuées aux vibrations I-O. Elles ne sont pas observées dans le spectre de H_5IO_6 à cause de l'absorption de la fluorine.

Le type de déformation qui donne la bande δ_{OH} à 1170 cm^{-1} dans HIO_3 correspond à l'une des bandes δ_{OH} de H_5IO_6 qui a la même fréquence 1170 cm^{-1} . Pour cette raison, la bande de fréquence 2280 cm^{-1} dans H_5IO_6 peut aussi être attribuée à la première harmonique de la δ_{OH} de 1170 cm^{-1} , aussi bien qu'à une vibration de valence ν_{OH} .

DISCUSSION DES RÉSULTATS

a) La présente étude du spectre infrarouge de l'acide paraperiodique apporte donc un argument supplémentaire en faveur de l'existence d'un composé de formule H_5IO_6 différent du dihydrate $\text{HIO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

b) Quant au comportement vibratoire du groupe hydroxyle du type I-OH, second point de vue envisagé dans ce travail, l'étude des spectres de H_5IO_6 et HIO_3 permet de définir les caractéristiques vibrationnelles de la déformation du groupement I-OH dans ces composés : la fréquence de déformation δ_{OH} peut varier de 1105 à 1285 cm^{-1} suivant le type de liaison.

1) Révision des attributions faites dans le cas des periodates de cuivre

En nous basant sur les résultats sus-mentionnés pour I-OH et sur ceux obtenus par Tarte ⁽¹⁴⁾ pour Cu-OH dans les sels basiques de cuivre, il nous paraît nécessaire de reprendre les résultats publiés récemment par Näsänen et ses collaborateurs ⁽¹⁶⁾ ⁽¹⁷⁾ ⁽¹⁸⁾ ⁽¹⁹⁾ sur les spectres infrarouges d'une série importante de periodates de cuivre et de plomb comprenant des sels basiques et des sels hydratés.

Ces auteurs ont d'abord étudié deux periodates basiques de cuivre auxquels ils attribuent les formules $\text{Cu}_2(\text{OH})(\text{H}_2\text{IO}_6) \cdot \text{H}_2\text{O}$ et $\text{Cu}_2(\text{OH})(\text{H}_2\text{IO}_6)^{(16)}$. Une bande vers 1180 cm^{-1} dans le premier composé et vers 1100 cm^{-1} dans le second sont attribuées aux vibrations du groupe Cu-OH: Cette attribution repose sur les travaux déjà signalés de Hartert et Glemser ⁽¹⁵⁾ sur des hydroxydes et des sels basiques. Cependant les valeurs expérimentales nous paraissent trop élevées pour que ces bandes puissent être attribuées à des vibrations de Cu-OH, car dans les nombreux sels basiques étudiés par Tarte ⁽¹⁴⁾, ces valeurs ne dépassent jamais 1050 cm^{-1} . Par contre les valeurs de Näsänen s'accordent très bien avec nos résultats pour des vibrations qui ne peuvent être attribuées qu'à des groupes I-OH, puisque nous observons deux bandes δ_{OH} dans H_5IO_6 à 1170 et 1105 cm^{-1} . Il nous paraît évident que l'interprétation de ces auteurs doit être modifiée comme nous venons de l'indiquer.

Dans les spectres d'autres periodates cuivriques, notamment $\text{Cu}_5(\text{IO}_6)_2 \cdot 5\text{H}_2\text{O}^{(17)}$, on n'observe que les bandes de l'eau; 3300 cm^{-1} pour ν_{OH} et 1620 cm^{-1} pour δ_{OH} . Les bandes caractéristiques de Cu-OH ou I-OH y sont inexistantes. De même, le spectre de $\text{Cu}_2\text{NaIO}_6 \cdot 2,2\text{H}_2\text{O}^{(18)}$ présente des bandes analogues à 3450 et 1620 cm^{-1} .

Le paraperiodate de plomb, de formule $\text{Pb}_3(\text{H}_2\text{IO}_6)_2$, a également été étudié par les mêmes auteurs ⁽¹⁸⁾ qui ont observé une bande ν_{OH} à 2600 cm^{-1} et une bande δ_{OH} à 1080 cm^{-1} . L'attribution de ces bandes à des groupes hydroxyles I-OH ou Pb-OH n'est pas spécifiée. Il nous paraît qu'elles ne doivent pouvoir être aussi attribuées qu'aux groupements I-OH. Les valeurs des fréquences sont toutefois un peu plus faibles que dans le cas des groupes I-OH de H_5IO_6 pour lequel la valeur de δ_{OH} la plus faible est voisine de 1100 cm^{-1} .

Signalons enfin, en accord avec nos résultats et l'interprétation que nous estimons devoir donner aux résultats de Näsänen, que les spectres de $\text{Cu}_2(\text{OH})(\text{H}_2\text{IO}_6) \cdot \text{H}_2\text{O}$ et de $\text{Cu}_2(\text{OH})(\text{H}_2\text{IO}_6)$ possèdent vers 2300 cm^{-1} une bande peu intense. Celle-ci est analogue à la bande de 2280 cm^{-1} que nous observons dans le spectre de H_5IO_6 et qui peut s'interpréter comme une des bandes de vibration de valence ν_{OH} ou comme la première harmonique de la déformation δ_{OH} , 1170 cm^{-1} , du groupement I-OH.

2) Comportement vibratoire général du groupement hydroxyle

1°) Relation entre ν_{OH} et δ_{OH}

Le comportement vibratoire du groupement hydroxyle a été dégagé par Hartert et Glemser⁽¹⁵⁾ qui l'ont exprimé par une relation empirique

$$r_{\text{OH}} = 8,9 \cdot 10^{-4} (4720 - \delta_{\text{OH}} - 0,7 \nu_{\text{OH}}),$$

où r_{OH} est la distance O-H en Å, δ et ν les fréquences en cm^{-1} . Cette relation, établie pour des hydroxydes et des sels basiques, traduit la manière dont les variations de la distance O-H sont reliées aux variations des fréquences de vibration de valence ν_{OH} et de déformation δ_{OH} .

a) Cas de HIO_3

Dans le cas de HIO_3 , tous les éléments nécessaires pour vérifier l'applicabilité éventuelle de la relation de Hartert et Glemser sont connus. Pour la distance O-H, nous avons pris comme valeur la moitié de la longueur du pont O-H ... O dans HIO_3 . Wells⁽²⁰⁾ a mesuré par diffraction de rayons X la longueur de ce pont linéaire, qui vaut 2.68 Å. En introduisant dans la relation de Hartert et Glemser les valeurs $r_{\text{OH}} = 1.34$ Å, $\delta_{\text{OH}} = 1170 \text{ cm}^{-1}$ et $\nu_{\text{OH}} = 2870 \text{ cm}^{-1}$, on trouve que cette relation est vérifiée à 2% près.

b) Cas de H_5IO_6

Dans le cas de H_5IO_6 , il n'est pas possible de vérifier cette relation à cause de la multiplicité des bandes ν_{OH} et δ_{OH} . On ne possède pas les valeurs des distances r_{OH} et on ne connaît pas la correspondance entre les ν_{OH} et les δ_{OH} .

Par ailleurs, l'identité de la valeur 1170 cm^{-1} d'une des δ_{OH} de H_5IO_6 et de la δ_{OH} unique de HIO_3 est en accord avec les valeurs des distances I-O mesurées par diffraction de rayons X. Dans les periodates acides, la distance I-O vaut 1.90 Å⁽¹⁰⁾ ⁽¹¹⁾ et il n'y a qu'une seule distance I-O. L'étude que Wells⁽²⁰⁾ a faite sur des cristaux de HIO_3 a montré que ce composé possède une structure pyramidale irrégulière; cet auteur a mesuré trois distances I-O, deux courtes de 1.78 et 1.82 Å et une longue de 1.90 Å. Cette dernière qui porte l'atome H est identique à celle des periodates acides.

Le fait que, pour le groupe I-OH de HIO_3 et un des groupes I-OH de H_5IO_6 , la longueur I-OH et la valeur de la fréquence de déformation du groupe hydroxyle sont identiques, entraîne également l'identité de caractère de la liaison I-O dans HIO_3 et d'une des liaisons I-O dans H_5IO_6 .

2°) Comportement du groupe OH acide

Il est important de remarquer que nous sommes ici en présence de groupements OH acides, qui n'ont encore été étudiés que très peu au point de vue vibrationnel. A la suite d'un récent travail sur les fréquences OH dans NaHCO_3 et KHCO_3 , Tarte ⁽²¹⁾ a suggéré que le rapport des variations $\Delta\delta_{\text{OH}}$ et $\Delta\nu_{\text{OH}}$ pour NaHCO_3 et KHCO_3 est très inférieur (0.24) à celui que Hartert et Glemser ont donné d'une manière générale pour les hydroxydes et les sels basiques (0.66). Il a montré que ce rapport doit toutefois être plus faible que 0.66 dans le cas de certains hydroxydes basiques où la distance O-H est courte.

De plus, en ce qui concerne la relation de Hartert et Glemser, il est à noter que, dans le cas des sels basiques de cuivre, Tarte a montré que la relation linéaire $\nu_{\text{OH}} = f(\delta_{\text{OH}})$ ne se vérifie pas avec une concordance satisfaisante, mais qu'elle doit être remplacée par une fonction moins simple.

Il se peut donc que la vérification de cette relation dans le cas de HIO_3 soit purement fortuite, car nous ne croyons pas pouvoir intégrer sans réserves nos résultats pour des OH acides dans des conclusions qui ont été tirées pour des hydroxydes et des sels basiques, c'est-à-dire relation $\nu_{\text{OH}} = f(\delta_{\text{OH}})$ linéaire ou non linéaire.

Si nous comparons les résultats actuels pour I-OH avec ceux de Tarte pour C-OH, nous n'obtenons pas une valeur constante pour $\Delta\delta_{\text{OH}}/\Delta\nu_{\text{OH}}$, ce qui semble indiquer que, comme pour les OH basiques, la relation $\nu_{\text{OH}} = f(\delta_{\text{OH}})$ pour les OH acides n'est pas linéaire non plus. Une telle relation ne pourra être mise en évidence que par l'étude de nombreux groupements OH acides de types divers. L'intérêt du problème justifiera une étude systématique plus poussée du comportement vibratoire du groupe OH acide.

Nous remercions Monsieur le Professeur D'Or pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et P. Tarte pour les discussions que nous avons eues au sujet des résultats. Nous remercions également le Fonds National de la Recherche Scientifique pour le mandat d'aspirant qu'il nous a accordé.

BIBLIOGRAPHIE

- (¹) W. OSTWALD, *Journ. prakt. Chem.*, **50**, (1928), 2678.
- (²) P. WALDEN, *Zeit. phys. Chem.*, **2**, (1888), 65.
- (³) S. L. AGGARVAL, S. SINGH, *J. Indian Chem. Soc.*, **22**, (1945), 158.
- (⁴) P. P. GYANI, B. P. GYANI, *J. Indian Chem. Soc.*, **26**, (1949), 239.
- (⁵) K. V. ASTAKOV, A. G. ELITSUR, K. M. NIKOLAEV, *Zhur. Obshchei Khim.*, **21**, (1951), 1753.
- (⁶) E. CORNEC, *Ann. Chim. phys.*, **30**, (1913), 63.
- (⁷) C. E. CROUTHAMEL, H. V. MECK, D. S. MARTIN, C. V. BANKS, *J. Am. Chem. Soc.*, **71**, (1949), 3031.
- (⁸) P. SOUCHAY, A. HESSABY, *Bull. Soc. Chim. Fr.*, (1953), 599.
- (⁹) H. SIEBERT, *Z. anorg. u. allgem. Chem.*, **273**, (1953), 21.
- (¹⁰) L. HELMOLZ, *J. Am. Chem. Soc.*, **59**, (1937), 2036.
- (¹¹) A. FERRARI, R. CURTI, L. CAVALCA, *Gazz. Chim. Ital.*, **74**, (1944), 43.
- (¹²) A. E. VAN ARKEL, C. P. FRITZIUS, *Rec. Trav. Chim.*, **50**, (1931), 1043.
- (¹³) J. LECOMTE, C. DUVAL, *J. Chim. Phys.*, **50**, (1953), 53.
- (¹⁴) P. TARTE, *Spectr. Acta*, **13**, (1958), 107.
- (¹⁵) E. HARTERT, O. GLEMSER, *Z. Elektrochem.*, **60**, (1956), 746.
- (¹⁶) R. NÄSÄNEN, R. UGGLA, Y. HIRVONEN, *Suomen Kemistilehti*, B **30**, (1957), 31.
- (¹⁷) R. NÄSÄNEN, R. UGGLA, K. A. HELIN, *Suomen Kemistilehti*, B **31**, (1958), 162.
- (¹⁸) R. NÄSÄNEN, R. UGGLA, A. SALO, *Suomen Kemistilehti*, B **31**, (1958), 176.
- (¹⁹) R. NÄSÄNEN, R. UGGLA, *Suomen Kemistilehti*, B **31**, (1958), 225.
- (²⁰) A. F. WELLS, *Acta cristall.*, **2**, (1949), 128.
- (²¹) P. TARTE, communication au Congrès de Spectroscopie de Ljubljana, 1957.

Mesure de la polarisation circulaire
des rayons gamma
par détection de l'électron Compton ;
étude critique de l'expérience Clay-Hereford (1)

PAR

J. DEUTSCH (*)

ABSTRACT:

Clay-Hereford experiment (1) measuring circular polarisation of gamma rays by detection of Compton electrons produced in magnetised Fe foils is analysed. Insucces of the experiment appears to be the result of 1. insufficient magnetic orientation of the scatterer and 2. overwhelming detection of spurious gamma rays without interaction with the scatterer. This second drawback being hard to eliminate, one concludes against the utilisation of Compton-electron detection in gamma-ray circular polarisation measurements.

INTRODUCTION

Depuis la mise en évidence de la non conservation de la parité dans les interactions faibles (2) la mesure de la polarisation circulaire des rayons gamma émis suite à un processus d'interaction faible — qui fixe un axe orienté dans l'espace du noyau — est devenue intéressante pour préciser certaines données de la structure nucléaire et de l'interaction faible.

L'intérêt, la base théorique et les diverses réalisations expérimentales de ces mesures ont été passés en revue par Tolhoek (3) et H. Schopper (4). Bien qu'en principe on puisse faire appel à plusieurs méthodes (4), la diffusion Compton sur des électrons polarisés semble être la plus efficace — au moins dans la région d'énergie habituelle (100 Kev - 2 Mev) — pour analyser la polarisation circulaire des rayons gamma.

La section efficace de l'effet Compton varie en fonction de

(*) Chercheur agréé de l'I.I.S.N.

l'angle déterminé par le spin de l'électron diffuseur et celui du photon incident (v.p.e. ⁴). Pour la détermination de la polarisation circulaire des rayons gamma on peut tirer parti de cet effet par des mesures soit de transmission (fig. 1a) soit de diffusion dans une direction donnée (fig. 1b et 1c).

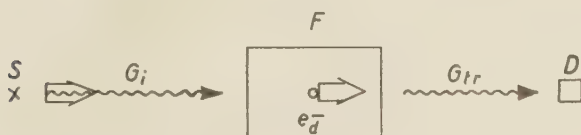


Fig. 1a

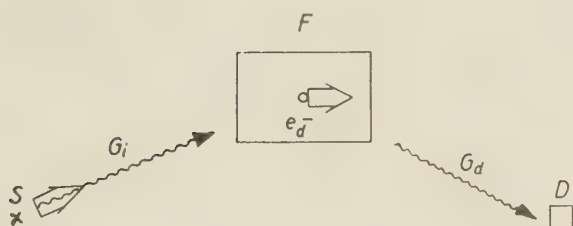


Fig. 1b

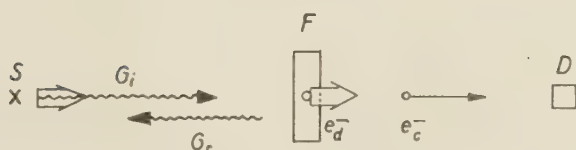


Fig. 1c

Fig. 1. — S : source de rayonnement; F : fer magnétiquement saturé; D : détecteur; G_i : rayon γ incident; G_{tr} : rayon γ transmis; G_d : rayon γ diffusé; G_r : rayons γ retrodiffusés; e_d^- : électron diffuseur; e_c^- : électron Compton. Les flèches indiquent la direction de propagation, les doubles flèches la direction des spins.

La sensibilité de la méthode de transmission dépend de l'énergie du rayon gamma à analyser (⁴). Elle est très faible entre

400 et 800 Kev, région d'énergie importante si on désire entreprendre une étude systématique des noyaux du point de vue de l'interaction faible.

La méthode de diffusion autour de 50° (fig. 1b) reste utilisable pour toutes les énergies au-dessus de 200 Kev, mais les conditions expérimentales (diffuseur et détecteur étendus) rendent impossible la sélection d'énergie, c.-à-d. la mesure de la polarisation circulaire de rayons gamma provenant de cascades complexes. On peut souvent pallier cette difficulté par des techniques de coïncidences, mais il paraît néanmoins intéressant de développer une méthode n'ayant pas les désavantages des deux précédentes.

La sensibilité de la méthode de diffusion est maximum pour une diffusion à 180° : la rétrodiffusion (fig. 1c). Les difficultés expérimentales liées à la détection sélective des rayons gamma rétrodiffusés en font cependant une méthode inférieure à celle de diffusion vers l'avant. Si toutefois au lieu d'observer les rayons gamma rétrodiffusés, on réussit à détecter les électrons de recul (émis dans la direction d'incidence des photons), on peut espérer éliminer les difficultés et développer une méthode à la fois énergétiquement sélective et utilisable dans le domaine interdit à la méthode de transmission.

La méthode a été appliquée par Clay et Hereford (1). L'effet trouvé différant toutefois en grandeur comme en signe des prévisions théoriques (5), on l'interprète actuellement comme étant d'origine instrumentale (3).

Vu les espoirs attachés à cette méthode, il nous a paru intéressant de rechercher les causes de l'échec de l'expérience Clay-Hereford et de voir si elles ne pouvaient pas être éliminées.

DESCRIPTION DE L'EXPÉRIENCE CLAY-HEREFORD

L'expérience Clay-Hereford est schématisée à la fig. 2. Les rayons gamma dont on mesure la polarisation circulaire sont les quanta d'annihilation des positrons émis par une source de Na^{22} .

Par une détection en coïncidence on n'accepte que les photons provenant d'une annihilation en deux quanta ($\Delta J = 0$); les deux photons ont une polarisation circulaire complète de même type. Les photons produisent des électrons Compton (fig. 1c) dans deux feuilles de Fe ($0,1 \text{ g/cm}^2$) dont l'aimantation peut être renversée. Les électrons Compton sont détectés par un cristal

de stilbène (0,5 mm), couvert d'une feuille de Al (4 mg/cm^2) et couplé à un photomultiplicateur RCA 5819. Seuls sont retenus les électrons Compton coïncidents ($2\tau = 2 \times 10^{-8} \text{ sec}$); le rapport de la fréquence de ces coïncidences pour une aimantation parallèle et anti-parallèle des diffuseurs est interprété comme une mesure de la polarisation circulaire des quanta d'annihilation.

DISCUSSION DE L'EXPÉRIENCE CLAY-HEREFORD

Un examen du dispositif expérimental nous révèle deux facteurs susceptibles de fausser l'expérience : l'aimantation insuffisante des diffuseurs et la trop grande sensibilité des détecteurs aux rayons gamma parasites.

Aimentation insuffisante des diffuseurs

La fig. 2 reprise à l'article de Clay et Hereford nous permet d'estimer les caractéristiques des bobines d'aimantation utilisées.

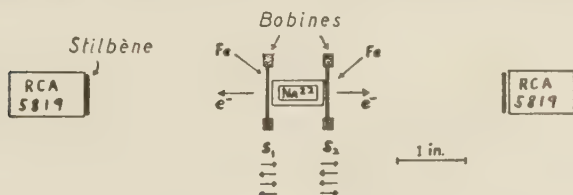
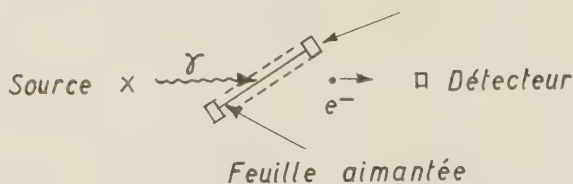


Fig 2

En nous limitant à une puissance dissipée raisonnable (10w), une bobine des dimensions indiquées est capable de fournir environ 70-ampère-tours. Pour calculer la valeur de l'induction magnétique induite par la bobine de 70 ampère-tours au milieu du diffuseur remarquons que la réluctance du circuit magnétique n'est que très peu influencée par la mince feuille de fer perpendiculaire aux lignes de force, et que par conséquent il suffit de considérer une bobine analogue sans fer : l'induction réelle ne diffère pas sensiblement de la valeur ainsi calculée. Nous obtenons 16 gauss, ce qui est très loin de la valeur de saturation (environ 20.000 gauss) : le pourcentage des électrons effectivement orientés n'est même pas le centième de la valeur supposée par Clay et Hereford (6×10^{-4} à la place de $8,5 \times 10^{-2}$). Avec les bobines utilisées on ne peut

atteindre la saturation qu'en se servant d'un circuit magnétique de très basse réluctance : d'un noyau de fer fermé p.e. Ceci rendrait évidemment impossible la mesure.

Cadre d'aimantation



Cadre d'aimantation

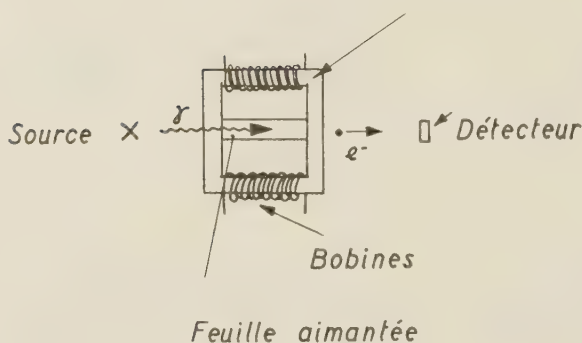


Fig. 3

On ne peut espérer améliorer considérablement la situation en refroidissant les bobines ou en augmentant leurs dimensions : comme on y introduit peu de matière ferromagnétique la réluctance du circuit magnétique reste grande et il est difficile d'approcher la saturation.

On pourrait remédier à cette difficulté en insérant la feuille

«diffuseur» dans un circuit magnétique en fer et en la disposant inclinée sur la direction d'incidence des rayons γ (fig. 3). Un dispositif analogue a été utilisé avec succès par plusieurs chercheurs pour la mesure de la polarisation longitudinale des rayons β par diffusion Møller (v. p.e. ⁶). Dans ce dispositif la polarisation efficace des électrons diffuseurs est légèrement diminuée à cause de l'inclinaison de la direction d'aimantation, mais cette diminution est compensée par la saturation plus facilement atteinte. Remarquons également que les champs de fuite sont moins importants que dans un dispositif de type Clay-Hereford.

Sensibilité des détecteurs aux rayons γ parasites

La variation du nombre des coïncidences pour des aimantations différentes des diffuseurs ne constitue une mesure de la polarisation circulaire des rayons γ que si les coïncidences enregistrées sont dues réellement à des électrons Compton produits dans les feuilles aimantées. Nous devons être certains que la contribution des photoélectrons, ainsi que des électrons Compton produits dans les bobines, dans l'entourage du cristal (photomultiplicateur !) et dans le cristal lui-même est négligeable.

Apparemment ces conditions se trouvent réalisées dans l'expérience Clay-Hereford : les photoélectrons n'interviennent qu'à l'occurrence de 2% (⁷), les électrons Compton produits dans les bobines et dans l'entourage sont de faible énergie et ont été éliminés par sélection de hauteur d'impulsion, enfin les électrons formés dans le cristal sont dits peu nombreux, l'efficacité du cristal pour les rayons γ n'étant que 4×10^{-3} .

Ce raisonnement semble toutefois perdre de vue que le nombre des rayons γ atteignant le cristal est de loin supérieur à celui des électrons (7×10^3 rayons γ pour un électron). Par conséquent la faible efficacité du cristal pour des rayons γ ne garantit pas encore que la contribution des rayons γ qui ont passé le diffuseur sans interagir est négligeable. Au contraire : le diffuseur étant mince, 0,1 g/cm², le nombre total des électrons Compton qui y sont produits n'est que le double de ceux formés dans le stilbène de 0,05 g/cm² (une efficacité de 8×10^{-3} , respectivement de 4×10^{-3}) (*).

(*) A ces énergies la section efficace de l'effet Compton est sensiblement la même pour une même quantité de Fe et de C exprimée en g/cm² (⁷).

Comme, en plus, l'expérience Clay-Hereford n'accepte que les électrons reculant dans un cône de 10° d'ouverture, axé sur la direction d'incidence des rayons γ , il n'y a que 2% des électrons formés dans le diffuseur qui atteignent le détecteur. L'efficacité de détection d'un électron produit dans la feuille est donc $8 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-2} = 1.6 \times 10^{-4}$. Ainsi parmi les signaux enregistrés il n'y a qu'une faible fraction qui provient des électrons produits dans le diffuseur. Si nous définissons R comme le rapport du nombre des signaux significatifs à celui des signaux parasites, on déduit des précédents la valeur $R = 4 \times 10^{-2}$. Dans le calcul nous avons négligé l'effet des rayons γ indirects (diffusés par les bobines et le photomultiplicateur). Leur contribution ne fait que diminuer encore la valeur de R .

Le rejet des signaux provenant d'électrons de basse énergie est susceptible — en principe — d'augmenter la valeur de R . Comme toutefois Clay et Hereford ne donnent pas d'indications précises à ce sujet, nous avons recherché nous-même s'il existe un niveau de discrimination approprié des signaux qui permettrait d'obtenir une valeur de R acceptable. A cet effet nous avons étudié la réponse d'un dispositif analogue à celui de Clay et Hereford (cristal d'antracène de 0.5 mm d'épaisseur couplé à un photomultiplicateur RCA 6199) à l'aide d'un analyseur de hauteur d'impulsion à 100 canaux. Aux fluctuations statistiques près, la présence ou l'absence de la feuille «diffuseur» n'influence le spectre en aucune de ses parties, fixant ainsi pour R une limite supérieure de 5% et ceci pour n'importe quel niveau de discrimination.

Trop peu d'électrons sont formés dans le diffuseur et trop dans l'entourage et dans le cristal même. Pour que l'expérience devienne possible, nous devrions améliorer la valeur du rapport R d'au moins deux ordres de grandeur.

Il y a peu d'espoir d'augmenter le nombre des électrons produits dans le diffuseur : une augmentation de l'épaisseur empêcherait les électrons produits d'en sortir (l'épaisseur de 0.1 g/cm² utilisée constitue déjà une valeur limite : elle correspond au parcours des électrons de 330 KeV).

Nous avons fait deux sortes d'essais en vue de diminuer le nombre des électrons formés autour et dans le cristal : nous avons dégagé davantage le cristal et nous avons diminué son épaisseur. Pour dégager le cristal et l'éloigner du photomultiplicateur (RCA

6199 et 1P21), nous nous sommes servi d'un dispositif à guide de lumière schématisé à la fig. 4. La diminution de l'épaisseur du scintillateur a eu pour but de diminuer son efficacité aux rayons γ . Nous sommes évidemment limité par l'exigence d'assurer aux électrons une perte d'énergie suffisante dans le scintillateur pour que le signal correspondant émerge encore du bruit de fond thermique du photomultiplicateur. Nous avons utilisé dans nos essais des scintillateurs plastiques de 0.3 et 0.2 mm d'épaisseur.

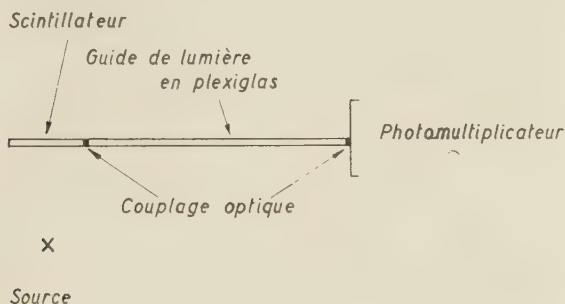


Fig. 4

Aucun de ces essais n'a réussi à diminuer la réponse du détecteur aux rayons γ parasites de plus d'un facteur deux. Comme nous avons vu, ceci est de loin insuffisant pour assurer le succès de l'expérience.

L'unique solution de ce problème qui nous paraît possible en principe est de séparer les électrons produits dans le diffuseur des rayons γ parasites par déflexion. Une déflexion entraîne cependant une telle perte dans le nombre des électrons que cette solution est également à déconseiller.

CONCLUSION

Nous sommes ainsi forcés de constater que les causes de l'échec de l'expérience Clay-Hereford sont inhérentes aux éléments constitutifs essentiels du dispositif expérimental. Une partie de ces causes est extrêmement difficile à éliminer. Il nous semble donc que la mesure de la polarisation circulaire des rayons γ par détection de l'électron de recul produit dans un milieu magnétiquement

orienté, bien que théoriquement très tentante, est pratiquement à exclure.

Monsieur le Professeur M. de Hemptinne a bien voulu nous montrer l'intérêt qu'il portait à ce travail; nous avons largement profité de l'aide et des conseils de Monsieur le Professeur P.C. Macq. Nous tenons à leur exprimer nos plus vifs remerciements.

(¹) F. P. CLAY and F. L. HEREFORD, *Phys. Rev.*, **85**, 675 (1952).

(²) cp. T. D. LEE and C. N. YANG, *Phys. Rev.*, **104**, 254 (1956).

(³) H. A. TOLHOEK, *Rev. Mod. Phys.*, **28**, 277 (1956).

(⁴) H. SCHOPPER, *Nucl. Instr.* **3**, 158 (1958).

(⁵) W. J. HUISKAMP, Thesis, Leiden, (1958).

(⁶) A. FRAUENFELDER et coll., *Phys. Rev.*, **107**, 785 (1957).

(⁷) K. SIEGBAHN : « Beta and Gamma Ray Spectroscopy » App. I North-Holland Publ. Co. (1955).

Mesure de la masse du Rn^{222} par spectrographie de masse

PAR

S. SZÜCS (*) et J. M. DELFOSSE
C.P.N.L. Héverlé-Louvain

Les très petites quantités d'isotopes radioactifs dont on dispose ne permettent généralement pas l'enregistrement de leurs ions sur les plaques photographiques sous forme de raies analogues à celles que l'on obtient communément en spectrographie de masse, avec les ions d'isotopes stables. Il est cependant possible en remplaçant les plaques ordinaires par des plaques nucléaires sensibles aux nucléons émis par les ions radioactifs d'enregistrer leur présence. Ce ne sont pas alors les impacts des ions sur la plaque qui la sensibilisent, mais leur désintégrations ultérieures.

Pour tester les possibilités de la méthode nous avons entrepris la mesure du doublet $\text{Rn}^{222}\text{-Pb}^{207}$ (CH_3). Nous avons choisi le Rn pour les raisons suivantes : Il se présente sous forme gazeuse, c'est un émetteur α , son temps de vie est relativement court et l'écart de masse obtenu entre le Pb^{207} et le Rn^{222} peut être comparé à la valeur calculée à partir des désintégrations radioactives.

Les mesures ont été faites au moyen d'un spectrographe du type Mattauch ⁽¹⁾, construit au C.P.N.L. ⁽²⁾. Le rayon de courbure maximum des ions dans le champ magnétique est 360 mm. Le rayon de courbure moyen des plaques du déflecteur électrique est de 400 mm. La source d'ions est une source à décharge classique ^(**). Avec une fente objet de 5 microns, le pouvoir de résolution théorique est donc de 40.000. La source fonctionne à des pressions de l'ordre

(*) Chercheur à l'I.I.S.N., Centre de Louvain.

(**) Nous tenons à remercier le MAX PLANCK INSTITUT für CHEMIE de Mayence qui nous a aimablement fourni les détails de construction de cette source.

de 10^{-2} mm Hg, et la consommation en plomb tétraméthyle est de $3 \cdot 10^{15}$ molécules par sec, dans les conditions normales de travail (28 kV et 4 mA de courant de décharge dans la source). Nous avons utilisé le plomb tétraméthyle dont l'ion $\text{Pb}^{207}(\text{CH}_3)^+$ sert de masse de comparaison dans la méthode du doublet. Le spectre de masse de ce produit s'enregistre très facilement sur les plaques Ilford Q₁ et Q₃ (Fig. 1); par contre l'enregistrement sur plaques nucléaires exige des temps de pose beaucoup trop longs.

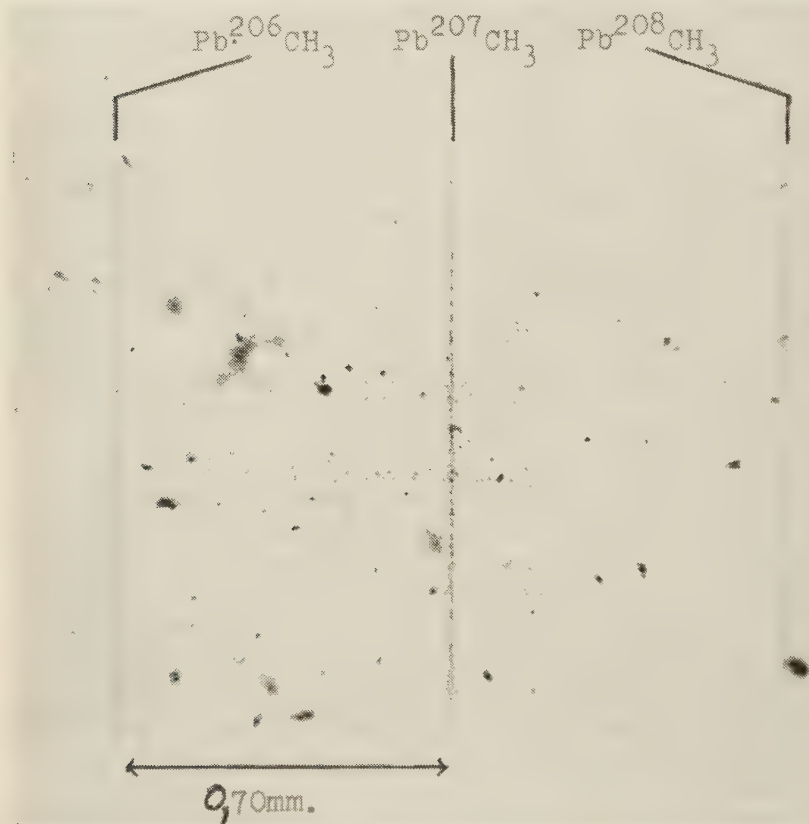


Fig. 1

Ayant constaté au cours de nos essais que les plaques Q — 1 Ilford font apparaître elles aussi les trajectoires des particules alpha, nous avons adopté la plaque Q₁-Ilford pour faire l'enregistrement simultané des deux raies de doublet.

Disposant d'une source de 50 millicuries de radium, la quantité maximum de radon utilisable à chaque prise de photo est de l'ordre de 10^{15} atomes. Le radon doit être amené dans la source sous la plus forte concentration possible, de façon à en utiliser la plus

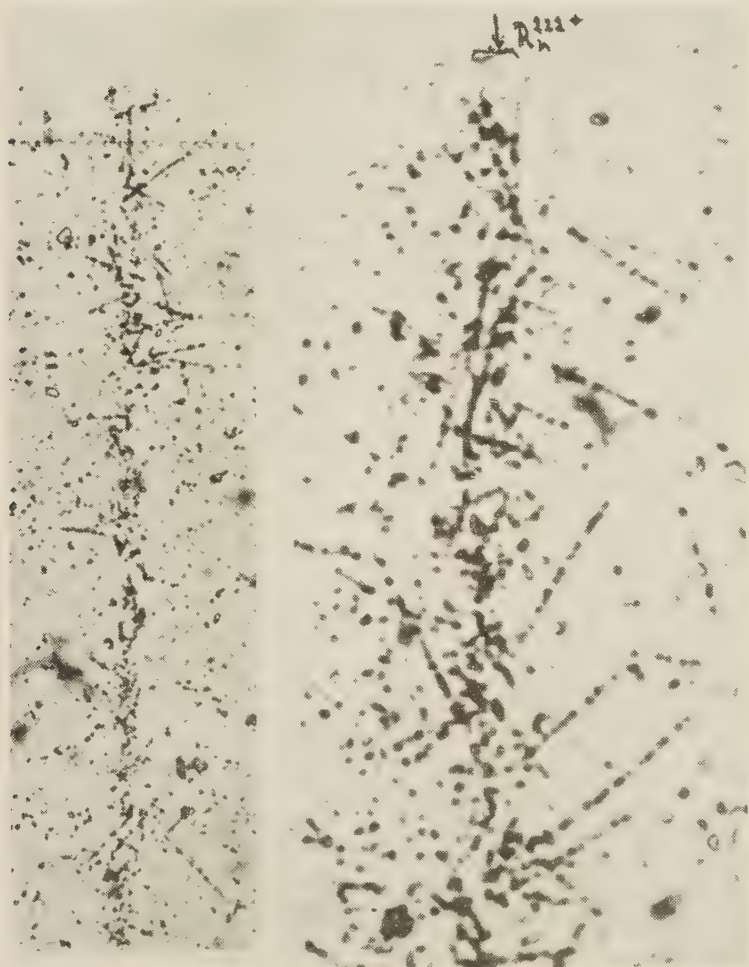


Fig. 2

grande partie pendant le temps de pose nécessaire à l'enregistrement de la masse du corps de comparaison. L'introduction du radon

ne peut perturber la décharge, ce qui pourrait modifier l'état de polarisation des plaques du déflecteur. Enfin la source doit fonctionner de manière telle que le rendement en ions-radon soit

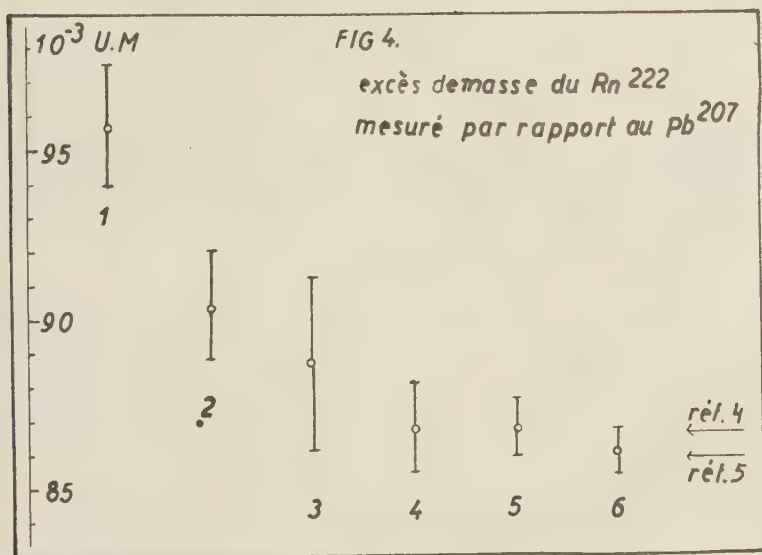


Fig. 3

maximum. Une série d'études préliminaires, faites sur un mélange $\text{Pb}(\text{CH}_3)_4$ et Xénon, nous a conduits à adopter un mélange de ces deux gaz dans la proportion de 40 à 60%.

Après beaucoup d'essais infructueux, nous avons adopté le processus suivant.

Le radon, préalablement purifié par «gettering (3)», est enfermé dans une aiguille de verre que l'on place dans le parcours du mélange vapeur de plomb tétraméthyle-Xénon, en aval de la vanne de réglage. Une fois la décharge stabilisée, l'aiguille de verre est cassée pendant la prise de photo. La durée du séjour du radon dans la source est d'environ une minute. Les photos sont développées trois jours après.



La raie du radon se présente toujours sous forme d'un groupement serré de traces de particules alpha et la largeur de cette raie ne peut donc en aucun cas être inférieure à deux fois la longueur des traces, soit environ 40 microns.

Il est donc essentiel de mesurer le centre de gravité de cette raie. Or, cette détermination est rendue imprécise par le recouvrement partiel des traces par la raie de référence. On doit donc s'attendre à mesurer des distances entre les centres de gravité des deux raies fortement dépendantes de leurs intensités relatives. Cependant, sur les photos à grande intensité de radon, on distingue une partie centrale constituée par des traces formant de petits

angles avec la normale au plan de la plaque. L'ensemble de ces traces a l'aspect d'une raie de dix à quinze microns de large.

La précision du comparateur employé a été contrôlée par une série de 150 mesures. L'erreur systématique de ce comparateur est de beaucoup plus petite que les erreurs statistiques de nos mesures sur le doublet $\text{Rn}^{222}\text{-Pb}^{207}(\text{CH}_3)$.

D'une trentaine de photos, six ont été retenues pour la mesure de la masse du radon. Chaque valeur est la moyenne d'une série de mesures. Nous en donnons le résumé dans le tableau 1 et à la figure 4.

TABLEAU I

N° de la photo	Largeur des raies de référence en microns	Intensité de la raie du Rn	Nombre des mesures effectuées	Raies de référence (a)	Masse du Rn^{222}	Erreur statistique (b)
1	25	faible	12	$\text{Pb}^{207}\text{CH}_3, \text{Pb}^{218}\text{CH}_3$	222,0958	$\pm 0,0017$
2	25	forte	12	» »	222,0905	$\pm 0,0016$
3	10	faible	8	» »	222,0889	$\pm 0,0026$
4	10	forte	54	» »	222,0869	$\pm 0,0013$
5	10	forte	16	» »	222,0869	$\pm 0,0008$
6	10	forte	56	$\text{Pb}^{216}\text{CH}_3, \text{Pb}^{218}\text{CH}_3$	222,0862(*)	$\pm 0,0007$

(a) Les valeurs suivantes ont été adoptées (°) $\text{Pb}^{206} = 206,0379 \pm 5$

$\text{Pb}^{207} = 207,0397 \pm 5$

$\text{Pb}^{208} = 208,0407 \pm 5$

$\text{C}^{12}\text{H}_3^1 = 15,0282493 \pm 14$

(b) La valeur absolue de la masse du Rn est affectée d'une erreur de ± 0.0005 due à l'indétermination sur le Pb et qui doit être ajoutée à l'erreur statistique.

La suite des valeurs dans le tableau 1 et à la figure 4 a été ordonnée d'après la qualité des photos correspondantes.

Pour établir cette échelle qualitative, nous avons tenu compte, successivement de a) la largeur des raies de comparaison; b) de l'intensité des raies du radon; c) de la statistique des mesures. En effet, l'erreur de jugement doit être plus grande dans une mesure

(*) La mesure a été faite par la méthode du triplet.

où la raie du Plomb est plus large, celle-ci couvrant alors un plus grand nombre de traces. D'autre part, on s'attend à un résultat plus exact avec une raie de radon intense. Dans ce cas en effet, le centre en est assez bien défini par les traces α en profondeur.

La figure 4 permet de se rendre compte d'une erreur systématique dans nos mesures, erreur imputable au recouvrement partiel des traces par la raie de référence. Toutefois, il est probable que cette erreur soit assez petite dans les trois dernières valeurs. En effet, la moyenne des photos 4 et 6 d'égal poids donne pour la masse de Rn^{222} : $222,0865 \pm 7$. Cette valeur indique un excès d'énergie de liaison négative par rapport au Pb^{206} de :

$\text{Rn}^{222} - (\text{Pb}^{206} + 4 \text{He}^4) = 33,1 \pm 0,7$ millièmes d'unité de masse ou $30,8 \pm 0,7$ MeV.

D'autre part, les évaluations effectuées par Stern⁽⁴⁾ et Seaborg⁽⁵⁾ à partir de désintégrations radioactives donnent comme écart $\text{Rn}^{222} - (\text{Pb}^{206} + 4 \text{He}^4)$ respectivement 33,2 et 32,6 millièmes d'unité de masse. Ces valeurs sont en accord avec les nôtres, à la précision de nos mesures, comme l'indique le tableau suivant :

TABLEAU II

	Masse du Rn^{222}	Ecart de masse sur $(\text{Pb}^{206} + 4 \text{He}^4)$	
		en millièmes	en MeV
Stern ⁽⁴⁾	222,08668 (*)	33,3	30,98
Seaborg ⁽⁵⁾	222,08598 (*)	32,6	30,30
nos mesures	$222,0865 \pm 7$	$33,1 \pm 0,7$	$30,8 \pm 0,7$

(*) Ces valeurs ont été corrigées en tenant compte de la nouvelle valeur de la masse du Pb donnée par Duckworth⁽⁶⁾.

Si on se rappelle que les mesures de précision d'un doublet ne peuvent se faire que si l'intensité des deux composantes est la même, on comprendra facilement que la structure différente des deux raies du doublet limite considérablement la précision de cette méthode. L'utilisation de plaques nucléaires épaisses serait cependant souhaitable. On pourrait alors déterminer le centre de la raie soit à partir des traces en profondeur, soit à partir des

étoiles de plusieurs branches. Ces dernières, en effet, sont très rares sur les plaques Q₁, où l'épaisseur de la gélatine ne dépasse pas quelques microns.

RÉFÉRENCES

- (¹) J. MATTAUCH et R. HERZOG, *Z. Physik*, **89**, 786, (1934).
- (²) J. M. DELFOSSE et M. NÈVE DE MÉVERGNIE, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **66**, 156, (1952).
- (³) S. SZÜCS, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **72**, 138, (1958).
- (⁴) M. O. STERN, AECD-1902, U. S. Atomic Energy Commission, Technical Information Division, Oak Ridge, Tennessee, U. S.
- (⁵) B. M. FOREMAN et G. T. SEABORG, *J. Inorg. Nucl. Chem.* **7**, 305, (1958).
- (⁶) H. E. DUCKWORTH, Mass Spectroscopy.

Un sélecteur de temps de vol pour neutrons de 14 Mev

PAR

G. DECONNINCK (*) et A. MARTEGANI

ABSTRACT:

A time of flight neutron spectrometer for neutrons of 14 Mev energy from the $T(dn)He^1$ reaction has been developed. With the «associated particle» method a resolution of $2 \cdot 10^{-9}$ sec has been reached by means of Green and Bell time to pulse height converter circuit.

En vue de mesurer le spectre des protons émis dans les réactions du type (np) nous avons construit et mis au point un spectromètre de haute précision du type «temps de vol». Dans ce montage le temps zéro est déterminé par la détection de la particule α associée au neutron de la réaction $T(dn)\alpha$.

Des temps de vol d'une durée de quelques 10^{-8} sec peuvent être mesurés avec une précision de $2 \cdot 10^{-9}$ sec.

APPAREILLAGE

Les deutérons sont accélérés sur une cible en tritium par la machine de Van der Graaff du C.P.N.L.

Les neutrons détectés à 90° ont une énergie de 14.1 Mev et les particules α associées sont émises en direction opposée avec une énergie de 3,5 Mev lorsque la tension d'accélération est de l'ordre de 100 KV.

Les particules α sont détectées par un scintillateur plastique NE 102 de 1" de diamètre et 1"/100 d'épaisseur monté sur photomultiplicateur RCA 6810 A, l'ensemble est placé en regard de la cible et à une distance de 25 cm de celle-ci (fig. 1 a). La face avant

(*) Chercheur agréé de l'I.I.S.N.

du scintillateur est aluminisée afin de protéger la photocathode de la lumière émise par la cible. Un écran d'aluminium de $0,5 \text{ mg/cm}^2$ (fig. 1b) empêche les deutérons diffusés d'atteindre le détecteur. Les particules α sont collimatées par deux anneaux d'aluminium (fig. 1c) dont le rôle est d'éliminer les α qui pourraient atteindre le compteur après diffusion sur les parois.

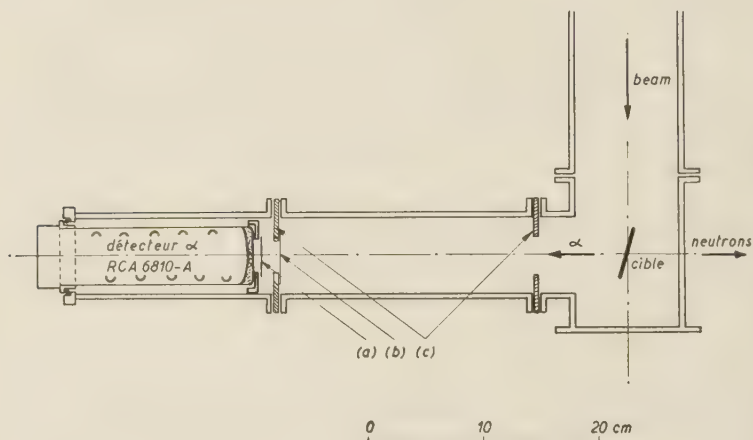


Fig. 1

Le compteur à neutrons est constitué par un scintillateur plastique de 2" de diamètre et 1" 1/2 d'épaisseur monté également sur photomultiplicateur RCA 6810 A et pouvant être déplacé dans tous les sens.

MESURE DU TEMPS DE VOL

La mesure des temps de vol s'effectue grâce à un circuit inspiré de celui de Green et Bell ⁽¹⁾ qui est de la plus haute précision malgré sa simplicité.

L'usage de photomultiplicateurs RCA 6810 A permet d'éviter les amplificateurs distribués qui introduisent une dispersion de l'impulsion.

L'impulsion négative sortant à l'anode est envoyée à la grille (fig. 2) du tube E 180 F dont le «cut off» se situe à -3 volts environ.

(¹) GREEN and BELL, Nuclear Instrument, 3 (1958), 127.

Après avoir été sélectionnées par le verrou les impulsions sont analysées par un analyseur à 100 canaux (fig. 3).

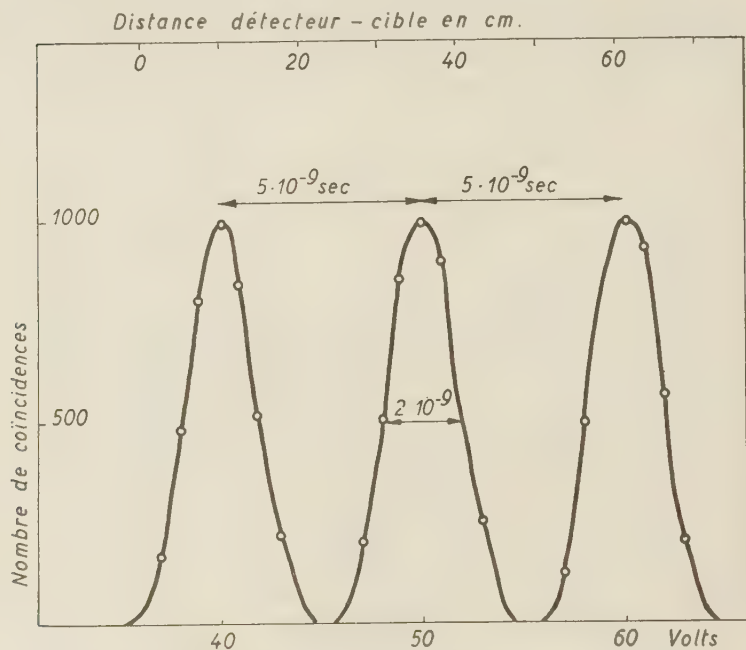


Fig. 3

Les chaînes latérales ont pour but de sélectionner les impulsions qui avaient à l'origine une amplitude suffisamment élevée que pour produire un rectangle complet de 32 μ sec. Ceci s'opère de la façon suivante : une sortie latérale sur la 10^e dynode donne des impulsions positives qui sont inversées par un tube 6AK5 et sont amplifiées par un amplificateur linéaire suivi d'un discriminateur dont le seuil est tel que seules les impulsions d'amplitude suffisante peuvent attaquer le circuit de coïncidence lente (type Rossi). Le signal sortant de ce dernier circuit est transformé en rectangle négatif de —10 Volts et déclenche le circuit de gate incorporé à l'analyseur à 100 canaux (fig. 3).

CAUSES DE DISPERSION

Une première cause de dispersion est la perte d'énergie des

particules α dans la cible. Il y a intérêt à réduire la tension d'accélération des deutérons afin que la réaction s'effectue en surface uniquement, de plus on incline la cible au maximum pour que le trajet de sortie des α soit aussi court que possible.

Cette deuxième précaution réduit également les différences de parcours pour les α suivant le point de la cible où la réaction a eu lieu.

Le détecteur à neutrons est un scintillateur plastique de 1" 1/2 d'épaisseur, ce qui correspond à 0,8 m μ sec de temps de transit pour les neutrons, d'où une incertitude quand à l'instant de détection; le diamètre de 2" est tel que toute la photocathode est utilisée, mais la dispersion dans le photomultiplicateur diminue lorsque l'on n'utilise que la partie centrale de la photocathode. Pour les expériences du type ($n\gamma$) le détecteur sera un disque de plastique NE 102 de 1" de diamètre et 1"/100 d'épaisseur ce qui réduira ces deux dispersions dans le détecteur.

Signalons enfin qu'il est nécessaire d'amener les impulsions α sur la grille n° 1 du tube 6BN6, en effet la capacité grille plaque est beaucoup moindre pour G_1 que pour G_3 , il y a donc intérêt à utiliser G_3 pour les impulsions du compteur dont le taux de comptage est le plus faible afin de ne pas charger inutilement le circuit intégrateur par des impulsions passant vers l'anode par effet capacitif. On évite ainsi des effets de «pile up» dus à la constante de temps assez longue du circuit intégrateur et qui introduisent une fluctuation dans la hauteur d'impulsion à la sortie du tube 6BN6.

RÉSULTATS DES MESURES

Le spectre des particules α a été pris directement après l'amplificateur de la chaîne latérale α et analysé au «multichannel». Ces particules ont une énergie de 3,5 Mev directement après la réaction, elles perdent d'abord un peu d'énergie dans la cible et ensuite environ 1 Mev dans les écrans d'aluminium (fig. 1 b). Leur spectre est reproduit à la figure 4, il a la forme d'un pic très étalé dont le maximum se situe à 20 Volts. Nous avons vérifié que les impulsions dues aux α sont toujours suffisamment élevées que pour produire un rectangle de 32 m μ sec à la sortie du tube E180F.

Nous avons ensuite mesuré le temps de vol des neutrons émis

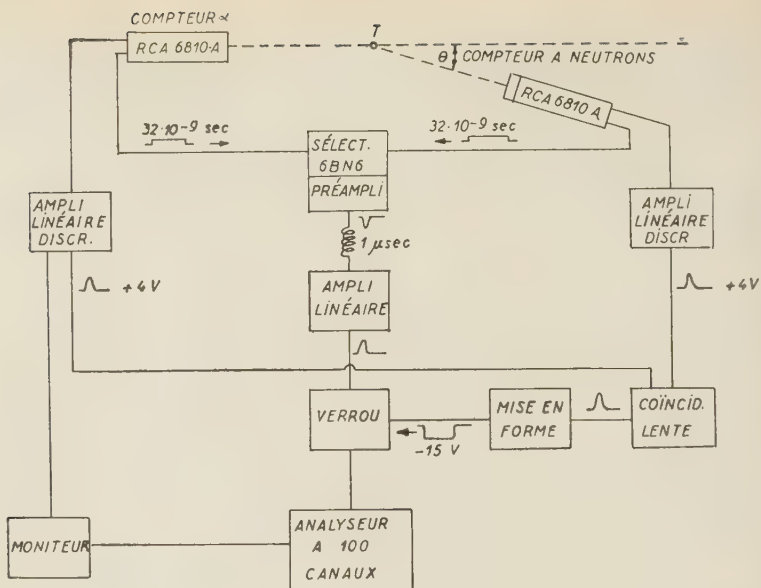


Fig. 4

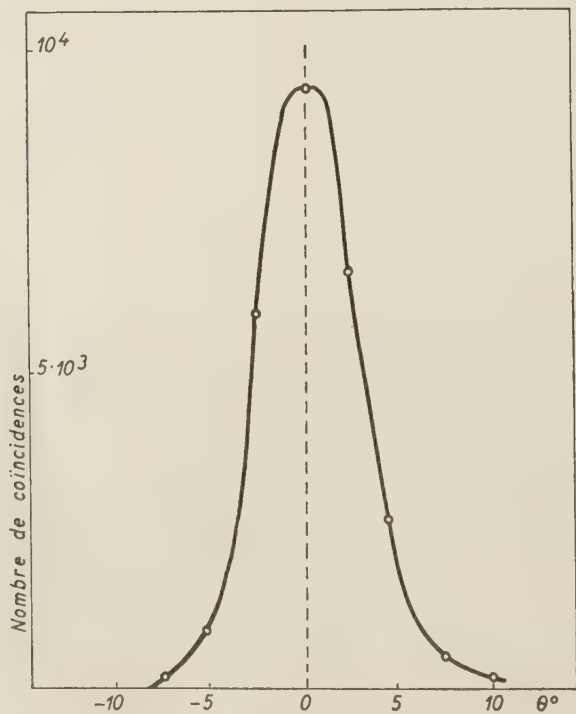


Fig. 5

en coïncidence avec ces α en plaçant le détecteur à neutrons à différentes distances de la cible et sur l'axe détecteur α — cible. Pour des neutrons de 14 Mev le temps de vol est de $19 \text{ m}\mu \text{ sec}$ par mètre. On obtient donc des délais différents en modifiant la distance entre la cible et le compteur à neutrons. Nous avons pris de nombreux spectres de neutrons, et l'un d'entre eux est reproduit à la figure 5. Ces courbes correspondent à trois positions séparées de 26 cm, c'est-à-dire, à des temps de vol différant de $5 \text{ m}\mu \text{ sec}$, leur largeur à mi-hauteur est de $2 \text{ m}\mu \text{ sec}$. Le bruit de fond est de l'ordre de 1‰ et n'est pas figuré sur le dessin.

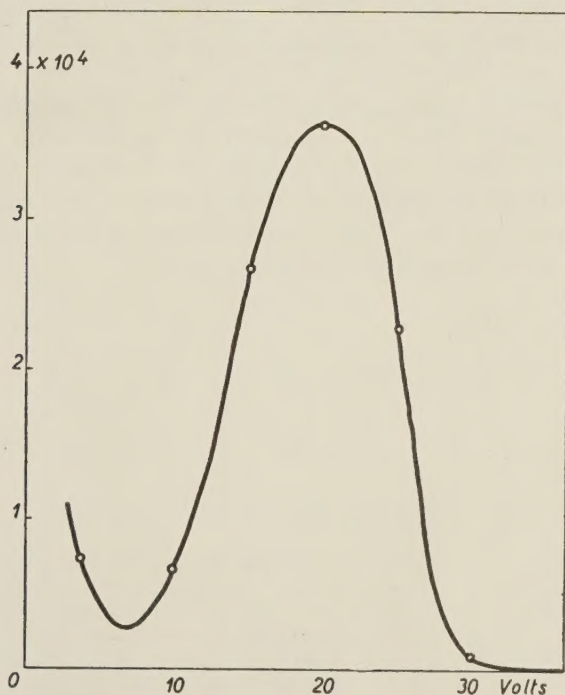


Fig. 6

La collimation des α due aux rondelles d'aluminium (fig. 1 c) et aux dimensions réduites du détecteur α se traduit par une variation du taux de coïncidences lorsqu'on déplace le compteur à neutrons dans un plan perpendiculaire au faisceau de deutérons. La figure 6 montre que cette collimation «découpe» un cône de

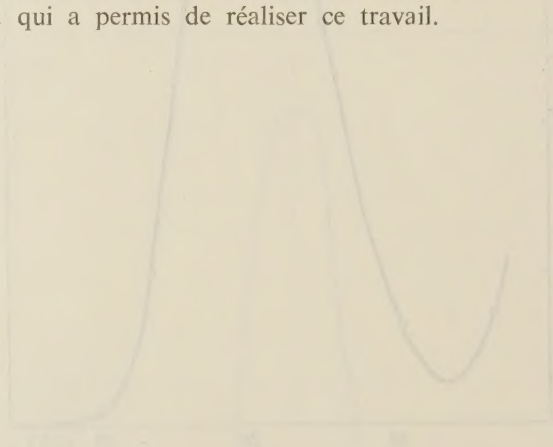
neutrons en coïncidence dont la largeur à mi-hauteur est de 5° , l'angle $\theta = 0$ correspond à la position où les deux compteurs et la cible sont alignés sur un même axe.

CONCLUSIONS

Nous avons construit un spectromètre du type temps de vol pour neutrons de 14 Mev permettant de détecter jusqu'à 1000 neutrons par seconde avec une précision de 2.10^{-9} sec sur la mesure du temps de vol.

Nous comptons utiliser ce spectromètre pour l'étude de réactions du type (n,p) à 14 Mev. Le spectre des protons issus de cette réaction serait obtenu par temps de vol sur une distance de 15 cm entre l'échantillon et le détecteur.

Nous tenons à remercier ici Monsieur le Professeur Marc de Hemptinne pour ses encouragements constants, ainsi que le Docteur P. C. Macq pour ses conseils lors de la mise au point de l'appareillage électronique, nos remerciements vont également à tout le personnel du CPNL pour son entière collaboration et à l'I.I.S.N. qui a permis de réaliser ce travail.



Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891); la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901); la **troisième**, 30 volumes (1902-1921); la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936) La livraison de janvier 1937 inaugure la **cinquième série**.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction: 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique)

PRIX D'ABONNEMENT

Belgique, Congo-Belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
abonnement de soutien	500 francs belges
abonnement d'honneur	1000 francs belges
France et Union française (s'adresser à la librairie	
Masson, 120, boulevard St. Germain, Paris 6 ^e) . . .	2160 francs franç.
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain)	280 francs belges

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages . . . F 150,00

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à LVI (1927 à 1936) . . . F 70,00

Série B (sc. physiques et naturelles) » » » F 70,00

Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) F 100,00 — (1929 à 1933) (1931 à 1936) F 40,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) F 20,00 — (1930) (1931 à 1936) F 60,00

Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXVII (1937 à 1953) F 70,00

t. LXVIII à LXXII (1954 à 1958) F 100,00

Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) F 70,00

Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . . F 100,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . F 200,00

Le fascicule trimestriel . . . F 60,00

t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . . F 200,00

Le fascicule . . . F 40,00

t. CXVII (1940 et 1946), tt. CXVIII à CXXIX (1947 à 1958). Le volume F 200,00

Le fascicule . . . F 60,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . F 20,00

t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . F 40,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,

t. I à L (1877 à 1901). . . F 20,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . F 20,00

t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . F 30,00

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I — B. Tougaraïoff. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930): en Belgique, F 24,00; autres pays: F 30,00.

II — V. Schaffers. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931): en Belgique, F 24,00; autres pays: F 30,00.

IV — F. Kaisin et E. de Pierpont. — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939): en Belgique, F 24,00; autres pays, F 30,00.

MONOGRAPHIES MÉDICALES

I — M. Schillings. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1938): en Belgique, F 70,00; autres pays, F 90,00.

III — P. Van Gehuchten. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930): en Belgique, F 24,00; autres pays, F 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

I — A. Henry. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . F 20,00

II — A. Henry. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . F 10,00

III — A. Delpérée. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . F 60,00